مسائل وحلول في:

الاحصاء والاحتمالات

مع حلول نماذج امتحانات

تأليف

أ. صلاح العيادي صالحين

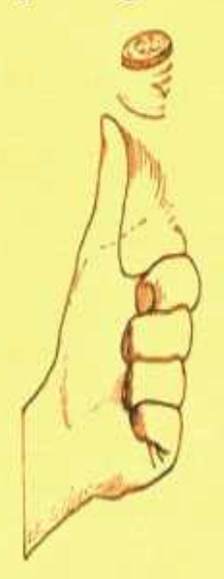


HEADS...

OR

TAILS









مسائل وحلول في:

الاحصاء والاحتمالات

مع حلول نماذج امتحانات

تأليف

أ. صلاح العيادي صالحين

المحتويات

مقاييس النزعة المركزية والتشتت

مقاييس النزعة المركزية :

1. المتوسّط الحسابي ، 2. الوسيط ، 3- المنوال ، 4. المتوسّط الهندسي ، 5. المتوسّط التوافقي.

ملاحظات هامّة:

1. مجموع انحرافات القيم عن متوسّطها الحسابي يساوي صفر $[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}) = 0]$.
2. اذا تمّ اضافة أو طرح قيمة ثابتة (c) إلى جميع القيم فإنّ المتوسط الحسابي الجديد يساوي المتوسط السابق مضافا اليه او مطروحا منه القيمة (c).
3. اذا تم ضرب او قسمة قيمة ثابتة (c) الى جميع القيم فإن المتوسط الحسابي الجديد يساوي المتوسط السابق مضروبا في او مقسوما على القيمة (c).
4. الوسيط هو القيمة التي تتوسط البيانات بعد ترتيبها تصاعديا او تنازليا، ويتأثر بالعمليات الحسابية مثل المتوسط الحسابي.
5. المتوسط الحسابي يتأثر بالقيم المتطرفة بينما الوسيط لا يتأثر بالقيم المتطرفة وبالتالي عندما توجد في البيانات قيم متطرفة فإن مقياس النزعة المركزية المناسب هو الوسيط.
6. المنوال هو القيمة الاكثر تكرارا من غيرها وقد يوجد في البيانات منوال واحد او منوالان او اكثر وقد لا يوجد منوال و يستخدم لوصف البيانات النوعية والكمية ويتأثر بالعمليات الحسابية مثل تأثر المتوسط الحسابي.
7. المتوسط الهندسي (G) ليس له معنى اذا كانت احدى القيم سالبة أو تساوي صفر.
8. المتوسط الحسابي يساوي المتوسط الهندسي ويساوي المتوسط التوافقي (H) اذا كانت جميع القيم متساوية.
9. اذا كانت القيم موجبة وغير متساوية فإن $\overline{X} > G > H$.

القوانين:

المتوسط الحسابي($\overline{X}$) :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

الوسيط : بعد ترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا نبحث عن القيمة:

$X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ حيث n عدد البيانات.

المنوال: هو القيمة الأكثر تكرارا من غيرها أو القيمة الأكثر شيوعا.

المتوسط الهندسي G:

$$G = \sqrt[n]{X_1 * X_2 * X_3 * \dots\dots X_n} = [X_1 * X_2 * X_3 * \dots\dots X_n]^{\frac{1}{n}}$$

المتوسط التوافقي H:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$$

مقاييس التشتت:

1 - المدى 2- التباين 3- الانحراف المعياري 4 - معامل الاختلاف

- المدى يساوي (اكبر قيمة – اصغر قيمة) ويرمز له بالرمز R.
- يتأثر المدى بالقيم الشاذة.
- التباين يجب ان يكون موجب دائما واذا كانت جميع القيم متساوية فإن التباين يساوي صفر ويرمز له بالرمز S^2

- التباين لا يتغير باضافة او طرح قيمة ثابتة (C) لجميع القيم واذا تم ضرب او قسمة القيمة (C) لجميع القيم فإن التباين الجديد يساوي التباين السابق ضارب او تقسيم مربع القيمة الثابتة C.
- الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين ويرمز له بالرمز S .
- معامل الاختلاف يستخدم لمقارنة تشتت مجموعتين او اكثر ويعتبر المقياس الانسب عند اختلاف وحدات قياس المجموعتين.

القوانين:

المدى(R): وهو عبارة عن: أكبر قيمة – أصغر قيمة .

$$R = (X_n - X_1)$$

التباين(S^2): ويتم حسابه بأحد القوانين الثلاثة:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - n\overline{X}^2}{n-1}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}}{n-1}$$

الانحراف المعياري (S): وهو الجذر التربيعي للتباين.

$$S = \sqrt{S^2}$$

معامل الاختلاف(CV):

$$C.V\% = \frac{S}{\overline{X}} \times 100\%$$

اذا كانت لدينا بيانات لعينتين وتم دمجهما فان التباين المشترك(SP^2) والمتوسط الحسابي المشترك $\overline{X}$ يحسبان كالتالي :

$$SP^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 1)}$$

$$\overline{X} = \frac{n1\overline{X}_1 + n2\overline{X}_2}{n1 + n2}$$

حيث:

$$S \;,\; S^2 \;, \overline{X}$$

هي عبارة عن احصاءات متعلقة بالعينة وترمز على التوالي الى : المتوسط الحسابي للعينة , تباين العينة , الانحراف المعياري للعينة.

بينما:

$$(\sigma , \sigma^2 , \mu)$$

هي عبارة عن معلمات متعلقة بالمجتمع وترمز على التوالي الى : المتوسط الحسابي للمجتمع , تباين المجتمع , الانحراف المعياري للمجتمع.

(امثلة متنوعة)

مثال: للبيانات التالية :

10 8 11 4 5 7 9 16 2 8 6

1. احسب المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

2. احسب مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})$.
3. احسب المدى والتباين والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف .

الحل:

1. المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال:

- المتوسط الحسابي $(\overline{X})$ يساوي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{11} Xi}{n} = \frac{10+8+11+4+5+7+9+16+2+8+6}{11} = 7.818$$

- لحساب الوسيط نرتب البيانات تصاعديا او تنازليا ثم نبحث عن القيمة $X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$:

16 11 10 9 8 8 7 6 5 4 2

$$X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = X_{\left(\frac{11+1}{2}\right)} = X_{\left(\frac{12}{2}\right)} = X_6 = 8$$

(وهي القيمة السادسة من بين القيم المرتبة تصاعديا او تنازليا) .

- المنوال: يوجد منوال واحد وهو العدد 8 .

2. مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}) = 0$$

وهي من خواص المتوسط الحسابي.

3. المدى والتباين والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف:

- المدي(R):

$$R = X_n - X_1 = 16 - 2 = 14$$

- التباين:

$$(S^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Xi)^2}{n}}{n-1} = \frac{816 - \frac{7396}{11}}{11-1} = 14.36$$

- الانحراف المعياري:

$$(S) = \sqrt{(S)^2} = 3.789$$

- معامل الاختلاف:

$$(C.V) = \frac{S}{\overline{X}} \times 100 = \frac{3.789}{7.818} \times 100\% = 48.46\%$$

مثال: اذا أضفنا للبيانات في المثال السابق العدد 5 فاحسب :

1. المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
2. المدى والتباين والانحراف المعياري.

الحل: المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال:

1. المتوسط الحسابي الجديد = المتوسط السابق+5 = 5+7.818= 12.818 .

الوسيط الجديد = الوسيط السابق + 5 = 5+8 =13 .

المنوال الجديد = المنوال السابق +5 = 13 .

2. المدى والتباين والانحراف المعياري:

المدي الجديد = المدي السابق = 14 .

التباين الجديد = التباين السابق = 14.36 ، الانحراف الجديد = الانحراف السابق = 3.789 .

مثال: أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى والتباين والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف للبيانات التالية :

6 6 6 6 6 6

الحل: البيانات متساوية ، اذا الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال = 6 .

وكذلك ، المدى = التباين = الانحراف المعياري = معامل الاختلاف = 0 .

مثال: احسب مقاييس النزعة المركزية للبيانات التالية :

5 6 2 8 2 5

الحل: المتوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6} Xi}{n} = \frac{5+6+2+8+2+5}{6} = 4.666$$

الوسيط: لحساب الوسيط نرتب البيانات تصاعديا او تنازليا ثم نحدد القيمة $X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$:

8 6 5 5 2 2

$$X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = X_{\left(\frac{6+1}{2}\right)} = X_{3.5} = \frac{5+5}{2} = 5$$

المنوال: ويوجد منوالان وهما 2 ، 5 .

المتوسط الهندسي : $G = [X_1 * X_2 * X_3 * \dots\dots X_n]^{\frac{1}{n}} = [5 \times 6 \times 2 \times 8 \times 2 \times 5]^{\frac{1}{6}} = 4.107$

المتوسط التوافقي : $H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} = \frac{6}{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)} = 3.546$

مثال: احسب المنوال(ان وجد) للبيانات التالية:

24 33 9 8 7 5 4 1

الحل: لا يوجد منوال .

مثال: اذا كانت البيانات التالية تمثل الانفاق الاسبوعي لثمانية اشخاص على السلع الضرورية بالدينار :

46 52 47 45 48 56 52 50

أ. أوجد :

1. المتوسط 2- الوسيط 3- المنوال (ان وجد) 4 المدى 5- التباين الانحراف المعياري

ب. كرر الفقرة أ في الحالات التالية :

1. اذا انخفض استهلاك كل شخص بمقدار 5 دنانير .
2. اذا زاد استهلاك كل شخص بمقدار 5 دنانير.
3. اذا تضاعف استهلاك كل شخص.
4. اذا انخفض استهلاك كل شخص بمقدار 50%.

الحل:

1. المتوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{8} Xi}{n} = \frac{50+52+56+48+45+47+52+46}{8} = 49.5$$

2. الوسيط:

لحساب الوسيط نرتب البيانات تصاعديا او تنازليا :

$$56 \quad 52 \quad 52 \quad 50 \quad 48 \quad 47 \quad 46 \quad 45$$

$$X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = X_{\left(\frac{8+1}{2}\right)} = X_{4.5} = \frac{50+48}{2} = 49$$

3. المنوال: يوجد منوال واحد وهو العدد 52 .
4. المدى:

$$R = 56 - 45 = 11$$

5. التباين و الانحراف المعياري:

$$(S^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Xi)^2}{n}}{n-1} = \frac{19698 - \frac{(396)^2}{8}}{8-1} = 13.714285$$

ويكون الانحراف المعياري:

$$(S)=\sqrt{(S)^2} = 3.7032$$

ب.

1. إذا انخفض استهلاك كل شخص بمقدار 5 دنانير:

اذا انخفض الاستهلاك بمقدار 5 دنانير فإن (المتوسط الحسابي , الوسيط, المنوال) جميعها ستنقص بمقدار 5 دنانير وتصبح كالتالي :

المتوسط الحسابي = 44.5 , الوسيط = 44 , المنوال = 47

اذا انخفض الاستهلاك بمقدار 5 دنانير فان (المدى , التباين, الانحراف المعياري) لا تتأثر وتبقى كما هي .

2. إذا زاد استهلاك كل شخص بمقدار 5 دنانير:

اذا زاد الاستهلاك بمقدار 5 دنانير فان (المتوسط الحسابي , الوسيط, المنوال) جميعها ستزداد بمقدار 5 دنانير وتصبح كالتالي :

المتوسط الحسابي = 54.5 , الوسيط = 54 , المنوال = 57

اذا ازداد الاستهلاك بمقدار 5 دنانير فان (المدى , التباين, الانحراف المعياري) لا تتأثر وتبقى كما هي.

3. إذا تضاعف استهلاك كل شخص:

اذا ازداد الاستهلاك بمقدار الضعف فان (المتوسط الحسابي , الوسيط, المنوال) جميعها ستزداد بمقدار الضعف وتصبح كالتالي :

المتوسط الحسابي = 99 , الوسيط = 98 , المنوال = 104

اذا ازداد الاستهلاك بمقدار الضعف (× 2) فإن التباين يساوي مربع العدد 2 مضروبا في قيمة التباين السابق اما المدى والانحراف المعياري فيساويان العدد 2 مضروبا في المدى والانحراف المعياري السابقين كالتالي :

التباين = 4 × 13.714285 = 54.85714 , الانحراف المعياري =2 × 3.7032 = 7.4064 ،

المدي = 2 × 11= 22 .

4. اذا انخفض الاستهلاك بمقدار 50% أي (÷ 2) فان (المتوسط الحسابي , الوسيط, المنوال) جميعها ستنقص الى النصف وتصبح كالتالي :

المتوسط الحسابي = 24.75 , الوسيط = 24.5 , المنوال = 26 .

اذا نقص الاستهلاك الى النصف فان التباين يساوي قيمة التباين السابق مقسوما على مربع العدد اما المدى والانحراف المعياري فيساويان المدى والانحراف المعياري السابقين مقسومان على العدد 2 كالتالي :

$$S^2 = \frac{13.714285}{4} = 3.42857\,, \quad S = \frac{3.7032}{2} = 1.8516$$

$$\text{المدي} = \frac{11}{2} = 5.5$$

مثال: اذا كانت انحرافات 7 قيم عن متوسطها الحسابي هي :

$$2.2 \quad -2.1 \quad 0.1 \quad -1.2 \quad -0.7 \quad K \quad 1.3$$

فاوجد قيمة K .

الحل : مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي الصفر وبالتالي:

$$1.3 + K - 0.7 - 1.2 + 0.1 - 2.1 + 2.2 = 0 \ \rightarrow K = 0.4$$

مثال: البيانات الآتية تمثل تقديرات 10 طلاب فى المدخل الى علم النفس:

D C D B A C D F D F

اوجد منوال التقديرات لهؤلاء الطلاب.

الحل: المنوال = D

مثال: إذا كان المتوسط الحسابي للقيم التالية: 2، 5 ، 3 ، X ، 4 ، يساوي 6 ، فأوجد قيمة X .

الحل:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n} = \frac{2 + 5 + 3 + X + 4}{5} = 6 \rightarrow X = 16$$

مثال: إذا كان المنوال للقيم التالية : 5 ، $0.5K$ ، 3 ، 1 ، 2 يساوي 2 فأوجد قيمة K .

الحل: من خلال مفهوم المنوال بأنه القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها أو القيمة الاكثر شيوعا وبالتالي:

$$0.5K = 2 \rightarrow K = 4$$

مثال: إذا كانت البيانات التالية 3 ، 5 ، X ، 7 مرتبة تصاعديا وكان متوسطها الحسابي ($\overline{X}$) يساوي الوسيط (M) ، فأوجد قيمة X.

الحل:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n} = \frac{7 + X + 5 + 3}{4} = \frac{15 + X}{4} \qquad (1)$$

$$M = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = X_{(2.5)} = \frac{X + 5}{2} \qquad (2)$$

وحيث أن الوسط الحسابي يساوي الوسيط :

$$\frac{15 + X}{4} = \frac{X + 5}{2} \rightarrow 30 + 2X = 4X + 20 \rightarrow 2X = 10 \rightarrow X = 5$$

مثال: فى دراسة لمستوى أداء طلاب المرحلة الثانوية فى المدارس الحكومية (A) و الخاصة (B) فى اختبار القدرات و القياس, اخذت عينتين عشوائيتين من المجتمعين محل الدراسة فكانت النتائج التالية:

	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري
طلاب المدارس الحكومية (A)	65	8
طلاب المدارس الخاصة (B)	70	15

المطلوب ايهما اكثر تشتتا ، مجتمع طلاب المدارس الحكومية أم الخاصة؟

الحل :

$$C.V.(A)\% = \frac{S_A}{\overline{X}_A} \times 100\% = \frac{8}{65} \times 100\% = 12.3\%$$

$$C.V.(B)\% = \frac{S_B}{\overline{X}_B} \times 100 = \frac{15}{70} \times 100\% = 21.4\%$$

مجتمع طلاب المدارس الخاصة اكثر تشتتا من مجتمع طلاب المدارس الحكومية او نستطيع القول بان مجتمع طلاب المدارس الحكومية اكثر تجانسا من الخاصة.

مثال: إذا كان:

اذا كان $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1100 \quad , \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - 10) = 0$

فأوجد معامل الاختلاف .

الحل:

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - 10) = 0 \rightarrow \overline{X} = 10$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1} \;, \; S^2 = \frac{1100 - 10 \times (10)^2}{10-1} = 11.111 \rightarrow S = 3.333$$

$$(c.v) = \frac{S}{\overline{X}} \times 100 = \frac{3.333}{10} \times 100\% = 33.33\%$$

مثال: إذا كان متوسط درجات أحد الطلبة في 6 مقررات يساوي 70 درجة ، وعلمت أن درجاته في 5 مقررات هي:

74 ، 80 ، 70 ، 65 ، 60

فأوجد درجته في المقرر السادس.

الحل:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n} = \frac{(60 + 65 + 70 + 80 + 74) + X_6}{6} = 70$$

$$X_6 = 70 \times 6 - (349) = 71$$

مثال: إذا كانت:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i^2 = 20 \quad ، \quad \sum_{i=1}^{5} X_i(X_i - 1) = 10$$

فأوجد قيمة المتوسط الحسابي.

الحل:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i(X_i - 1) = \sum_{i=1}^{5} X_i^2 - \sum_{i=1}^{5} X_i = 10 \rightarrow 20 - \sum_{i=1}^{5} X_i = 10 \rightarrow \sum_{i=1}^{5} X_i = 10$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n} = \frac{10}{5} = 2$$

مثال: البيانات التالية تبين كميات حمض البوليك في دم 12 مريض :

531 ، 456 ، 450 ، 280 ، 202 ، 209 ، 471 ، 466 ، 498 ، 490 ،482 ، 377

تم حساب بعض المقاييس الاحصائية فكانت كالتالي:

معامل الاختلاف	الانحراف المعياري	المدى	الوسيط	المتوسط الحسابي
28.16	115.3	329	461	409.3

1. إذا تم ضرب كل القيم في 3 فاحسب الانحراف المعياري.
2. إذا تم اضافة 5 لكل القيم فأوجد المدي.
3. إذا تم ضرب كل القيم في 3 فأوجد قيمة الوسيط.

الحل:

1. الانحراف المعياري الجديد يساوي الانحراف السابق مضروبا في العدد 3 ويساوي 345.9 .
2. المدي لا يتأثر بإضافة أو طرح قيمة منه ، وبذلك يكون المدي الجديد مساو للمدى السابق ويساوي 329 .
3. الوسيط الجديد يساوي الوسيط السابق مضروبا في العدد 3 ويساوي 1383 .

مثال: إذا علمت أن المتوسط الحسابي لخمس قيم يساوي 80 فإذا حسب العدد 50 بدلا من العدد 20 عن طريق الخطأ فأوجد المتوسط الحسابي الصحيح.

الحل:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$$

$$80 = \frac{(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 50}{5} \rightarrow (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = 400 - 50 = 350$$

وبالتالي يصبح مجموع القيم الخمس الصحيح:

$$\sum_{i=1}^{n} Xi = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 20 = 370$$

والمتوسط الحسابي الصحيح :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n} = \frac{370}{5} = 74$$

مثال: إذا كان المتوسط الحسابي لعشرة قيم يساوي 62 , ومجموع انحرافات 9 قيم منها عن المتوسط الحسابي يساوي 5 ، فكم قيمة القيمة العاشرة.

الحل:

$$\overline{X} = 62$$

$$(X_1 - \overline{X}) + (X_2 - \overline{X}) + \cdots (X_9 - \overline{X}) = 5$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \overline{X}) = 0 \rightarrow (X_1 - \overline{X}) + \cdots (X_9 - \overline{X}) + (X_{10} - \overline{X}) = 0$$

$$5 + (X_{10} - \overline{X}) = 0 \rightarrow 5 + X_{10} - 62 = 0 \rightarrow X_{10} = 57$$

مثال: إذا علمت أن مجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي لعشرة قيم يساوي 82.665 فاحسب التباين.

الحل:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{82.665}{9} = 9.185$$

مثال: للبيانات التالية:

$$B > 7 > 5 > 4 > A$$

إذا كانت قيمة المتوسط الحسابي والمدى يساويان 5 و 6 على التوالي ، فأوجد قيمة A و B .

الحل:

$$\bar{X} = \frac{A+4+5+7+B}{5} = 5 \rightarrow A+B=9 \quad (1)$$
$$R = B - A = 6 \quad (2)$$

من 1 و 2 نجد أن: $B = 7.5 \;,\; A = 1.5$

مثال: البيانات التالية مرتبة تصاعديا 5 ، A ، B ، 12 ، 15 ، C ، فإذا كان متوسطها الحسابي $(\bar{X})$ يساوي 11 ، ووسيطها (M)يساوي أيضا 11 ومدى البيانات (R) يساوي 12 ، فأوجد قيم A و B وC .

الحل:

$$\bar{X} = \frac{5+A+B+12+15+C}{6} = 11 \rightarrow A+B+C=34 \quad (1)$$
$$M = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = X_{(3.5)} = \frac{12+B}{2} = 11 \rightarrow B=10 \quad (2)$$
$$R = X_n - X_1 = C - 5 = 12 \rightarrow C = 17 \quad (3)$$

بالتعويض بقيم B وC في (1) نجد أن $A = 7$

أنواع البيانات الاحصائية:

1. **البيانات الوصفية (النوعية):** وهي ذلك النوع من البيانات الذي يعبر عن ظواهر لا يمكن قياسها رقميا وإنما يتم تصنيف المتغير فيها إلى مستويات، وتنقسم إلى قسمين: بيانات نوعية اسمية وبيانات نوعية ترتيبية.
   - البيانات النوعية الاسمية: وهي البيانات النوعية الغير ترتيبية ، أي عدم إمكانية ترتيبها أو المفاضلة بينها مثل: فصيلة الدم أو تصنيف المواليد ، ذكر/ أنثى .
   - البيانات النوعية الترتيبية: وهي بيانات نوعية قابلة للترتيب أو التفضيل مثل: تقديرات الطلبة (جيد ، جيد جدا ، ممتاز) ، أهمية استخدام الانترنت في البحوث (مهمة جدا / مهمة / محدودة الأهمية / غير مهمة).
2. **البيانات الكمية:** وهي بيانات مُقاسة بمقياس كمي ، وتنقسم إلى نوعين: بيانات كمية منفصلة (متقطعة)و بيانات كمية متصلة(مستمرة).
   - البيانات الكمية المنفصلة (المتقطعة): وهي البيانات الناتجة عن العد ، ولا تأخذ إلا قيم صحيحة مثل : عدد أفراد الأسرة ، عدد الطلبة في فصل دراسي.
   - البيانات الكمية المتصلة (المستمرة) : وهي عبارة عن بيانات تدل على صفة ما يمكن قياسها وتأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية مثل: العمر ، الوزن، الطول ، درجة الحرارة ، الزمن، الحجم وغيرها.

مثال: بين نوع البيانات التالية:

1. ديانة شخص (مسلم ، مسيحي ، ....) .
2. المستوى الاقتصادي لدولة ليبيا.
3. الحالة الاجتماعية (متزوج، أعزب).
4. عدد الحوادث في منطقة معينة.
5. طول مهندس تم اختياره بطريقة عشوائية.
6. الزمن المستغرق لإنجاز مشروع إسكاني.
7. وزن طالب تم اختياره بطريقة عشوائية من أحد الفصول الدراسية.
8. تصنيف إنجاز مشروع تخرج (سريع ، متوسط ، بطيء).
9. عدد العمليات الجراحية في احد المستشفيات.

10. جودة منتج معين (جيدة ، متوسطة ، رديئة).
11. جنسية العاملين في شركة ما.
12. عدد أيام غياب طالب عن الدراسة.
13. درجة حرارة جسم الإنسان.
14. عمر شخص مقاس بالسنوات.
15. شدة النزيف الدموي لمريض (بسيط ، معتدل ، حاد).
16. مستوي السكر في الدم (منخفض ، معتدل ، مرتفع).
17. المستوى الدراسي (ابتدائي، اعدادي ، ثانوي ، جامعي).
18. عدد الأطفال في الأسر الريفية.
19. كمية الأمطار المتساقطة (ملم) لموسم الشتاء في مدينة طرابلس.
20. كمية ادرار الحليب لكل بقرة بمشروع ألبان.
21. سلالات الأبقار التي أدخلت إلى ليبيا في احد السنوات.

الحل:

1. نوعية اسمية .
2. نوعية ترتيبية.
3. نوعية اسمية.
4. كمية منفصلة (متقطعة).
5. كمية متصلة(مستمرة).
6. كمية متصلة(مستمرة).
7. كمية متصلة (مستمرة).
8. نوعية ترتيبية.
9. كمية منفصلة (متقطعة).
10. نوعية ترتيبية.
11. نوعية اسمية.
12. كمي منفصل (متقطع).
13. كمي متصل (مستمر).
14. كمي متصل (مستمر).
15. نوعي ترتيبي.
16. نوعي ترتيبي.
17. نوعي ترتيبي.
18. كمي منفصل (متقطع).
19. كمية متصلة (مستمرة).
20. كمية متصلة (مستمرة).
21. نوعية اسمية.

****

الاحتمالات

فراغ العينة:

هو الفئة التي تحتوي على كل نتائج التجربة العشوائية (التجربة العشوائية: هي التجربة التي تكون جميع نتائجها معلومة مسبقاً ولكن لا يمكن لأحد التنبؤ بحدوث أياً من هذه النتائج أولاً) .

الاحداث:

الحدث هو عبارة عن مجموعة جزئية من فراغ العينة، مثل الحدث A يرمز الى حدث ان الشخص فصيلة دمه +A حيث ان الفصيلة +A تعتبر جزء من فراغ العينة.

- الحدث المكمل : الحدث المكمل للحدث A يرمز له بالرمز A' حيث :

$$P(A') = 1 - P(A)$$

- الحدث المؤكد : اذا كان A حدث مؤكد الوقوع فأن $P(A) = 1$
- الحدث المستحيل : اذا كان A حدث مستحيل الوقوع فان $P(A) = 0$
- الأحدث المتنافية : هي الاحداث التي لا يمكن ان تحدث في نفس الوقت معا $P(A \cap B) = 0$
- الأحداث المستقلة: هي الأحداث التي اذا حدث احدها فلا يؤثر ذلك على حدوث الأخر.

ملاحظة : يكون احتمال حدوث أي حدث محصور بين الصفر والواحد , فاذا كان يساوي صفر فهو حدث مستحيل واذا كان يساوي واحد فهو حدث مؤكد.

أهم قوانين الاحتمالات: لأي حدثين A و B يكون:

$$P(A') = 1 - P(A)$$
$$P(B') = 1 - P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$
$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$$
$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$$
$$P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B)$$
$$P(A'/B) = 1 - P(A/B)$$

الاحتمال الشرطي: (احتمال وقوع الحدث A بشرط أن الحدث B قد وقع):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \quad P(B) > 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \quad P(A) > 0$$

إذا كان الحدثان A وB متنافيان (لا يمكن حدوثهما معا في نفس الوقت) فان:

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0$$

الحوادث المستقلة:

الحادثتين A و B حدثين مستقلين إذا كان حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث أو عدم حدوث الآخر. أي أن:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

ومنها نستنتج إذا كان الحدثين A و B حدثين مستقلين فإن

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

مثال : اوجد فراغ العينة للتجارب التالية:

1. فراغ العينة لنتيجة طالب.
2. فراغ العينة لنتيجة طالبين.
3. فرغ العينة لعمر الانسان.
4. فراغ العينة لرمي قطعة نقود مرة واحدة.
5. فراغ العينة لرمي قطعتي نقود مرة واحدة.
6. فراغ العينة لرمي زهرة نرد مرة واحدة.
7. فراغ العينة لرمي زهرة نرد مرتين.
8. فراغ العينة لرمي قطعة نقود 5 مرات.
9. فراغ العينة لرمى زهرة نرد 4 مرات.
10. فراغ العينة لسرعة سيارة في الطريق (مؤشر السرعة 220).
11. فراغ العينة لعمر آلة.
12. ثلاث سيدات ينتظرون الولادة, إكتب فراغ العينة لنوع المواليد الثلاث إذا كانت كل منهم ستنجب مولود واحد فقط.

الحل: من خلال التعريف في الاعلى فان فراغ العينة لابد ان يحتوي على كل النتائج الممكنة وبالتالي :

1. فراغ العينة :(T,F).
2. فراغ العينة :(TT,TF,FT,FF).
3. فراغ العينة قيمة متصلة من صفر الى مالا نهاية , فراغ العينة : $\{x: x > 0\}$ حيث x ترمز الى العمر.
4. فراغ العينة $\{T, H\}$.
5. فراغ العينة $\{TT , TH , HT , HH\}$.
6. فراغ العينة $\{1,2,3,4,5,6\}$.
7. فراغ العينة $\{(1,1), (1,2), (1,3) \dots \dots \dots\}$.
8. (TTTTT,TTTTH,TTTHT,.......).
9. $\{(1,1,1,1), (1,1,1,2), (1,1,1,3) \dots \dots \dots\}$.
10. فراغ العينة قيمة متصلة (الفترة ما بين 0-220) , فراغ العينة : $\{x: 0 < x < 220\}$ حيث x ترمز الى السرعة.
11. فراغ العينة فترة متصلة (من صفر الى نهاية عمر الآلة) فراغ العينة : $\{x: x > 0\}$ حيث x ترمز الى عمر الآلة .
12. فراغ العينة : (mmm,mmf,mfm,mff,fff,ffm,fmf,fmm).

مثال: في تجربة رمي حجرة نرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي ، فإن المجموعات التالية تشكل حوادث لأنها مجموعات جزئية من فراغ العينة S .

A = { 6 ,4 ,2} = { ظهور عدد زوجي }   n(A) = 3

$B = \{5, 3, 1\} = \{$ظهور عدد فردي$\}$ $n(B) = 3$

$C = \{5, 4, 3, 2, 1\} = \{$ظهور عدد أقل من ستة$\}$ $n(C) = 5$

$D = \{6\} = \{$ظهور العدد ستة$\}$ $n(D) = 1$

$\phi = \{$ظهور عدد سالب$\} = \{\ \}$ $n(\phi) = 0$

$S = \{6, 5, 4, 3, 2, 1\} = \{$ظهور عدد موجب$\}$ $n(S) = 6$

مثال: يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و4 كرات زرقاء ، سحبت كرتان على التوالي ، إذا كان السحب مع الإرجاع وإذا رمزنا إلى حدث أن الكرة المسحوبة حمراء بالرمز R وحدث ان الكرة المسحوبة زرقاء بالرمز B فان:

1. احتمال أن تكون الكرتان حمراوين هو: $P(RR) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = 0.36$
2. احتمال أن تكون الكرتان زرقاوين هو: $P(BB) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = 0.16$
3. احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون هو: $P(RR) + P(BB) = 0.36 + 0.16 = 0.52$
4. احتمال ان تكون الكرتان مختلفتي اللون هو: $P(RB) + P(BR) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = 0.48$
5. احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء هو:: $P(RB) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = 0.24$
6. احتمال أن تكون إحدى الكرتين حمراء على الأقل هو:

$$P(RB) + P(BR) + P(RR) = 0.24 + 0.24 + 0.36 = 0.84$$

7. احتمال أن تكون احدى الكرتين حمراء على الأكثر هو:

$$P(RB) + P(BR) + P(BB) = 0.24 + 0.24 + 0.16 = 0.64$$

8. احتمال أن تكون الثانية حمراء علما ان الاولى حمراء: ولإن السحب مع الإرجاع فالاحتمال يساوي $\frac{6}{10}$.

مثال: أعد المثال السابق بافتراض أن السحب بدون ارجاع.

1. احتمال أن تكون الكرتان حمراوين هو: $P(RR) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = 0.333$
2. احتمال أن تكون الكرتان زرقاوين هو: $P(BB) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = 0.133$
3. احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون: $P(RR) + P(BB) = 0.333 + 0.133 = 0.466$
4. احتمال ان تكون الكرتان مختلفتي اللون $P(RB) + P(BR) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = 0.533$
5. احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء: $P(RB) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = 0.266$
6. احتمال أن تكون إحدى الكرتين حمراء على الأقل:

$$P(RB) + P(BR) + P(RR) = 0.266 + 0.266 + 0.333 = 0.865$$

7. احتمال أن تكون احدى الكرتين حمراء على الأكثر:

$$P(RB) + P(BR) + P(BB) = 0.266 + 0.266 + 0.133 = 0.665$$

8. احتمال أن تكون الثانية حمراء علما ان الاولى حمراء: ولإن السحب بدون الإرجاع فالاحتمال يساوي $\frac{5}{9}$.

مثال: احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها وذلك في تجربة قذف قطعة نقود مرتين متتاليتين:

A = {الحصول على صورة في الرمية الأولى} ، B = {الحصول على كتابة في الرمية الأولى}.

C = {الحصول على صورة واحدة على الأقل} .

الحل: نرمز إلى فراغ العينة بالرمز S وبالتالي:

$S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\};\ n(S) = 4$

$A = \{(H,H), (H,T)\};\ n(A) = 2$

$B = \{(T,H), (T,T)\};\ n(B) = 2$

$C = \{(H,H),(H,T),(T,H)\};\ n(C) = 3$

مثال: احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها وذلك في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين باعتبار أن (x) يرمز لنتيجة الرمية الأولى و (y) يرمز لنتيجة الرمية الثانية :

$A = \{(x,y): x + y < 4\}$
$B = \{(x,y): x = y\}$
$C = \{(x,y): x = 5\}$
$D = \{(x,y): x + y = 1\}$

الحل: الجدول التالي يبين فراغ العينة للتجربة وعدد عناصرها يساوي 36 .

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
⇑ A				⇑ C	

$A = \{(x,y): x + y < 4\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\};\ n(A) = 3$
$B = \{(x,y): x = y\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\};\ n(B) = 6$
$C = \{(x,y): x = 5\} = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\};\ n(C) = 6$
$D = \{(x,y): x + y = 1\} = \{\ \} = \phi;\ n(D) = 0$

مثال: ما مفهوم الاحداث التالية :

$$A \cup B \quad , \quad A \cap B \quad , A^C , A^C \cap B , A \cap B^C , A^C \cap B^C$$

الحل:

- $A \cup B$ تتكون الحادثة $A \cup B$ من عناصر فراغ العينة S الموجودة إما في A أو B أو في كليهما، وقوع الحادثة $A \cup B$ يعني وقوع إحداهما على الأقل .
- $A \cap B$ تتكون الحادثة $A \cap B$ من عناصر فراغ العينة S الموجودة في كلاً من A و B. وقوع الحادثة $A \cap B$ يعني وقوع A ووقوع B (وقوع الإثنين معاً).
- A^C تتكون من عناصر فراغ العينة S الغير موجودة في الحادثة A. وقوع A^C يعني عدم وقوع A . ويرمز له ايضاً بالرمز A'.
- $A^C \cap B$ عناصر فراغ العينة الغير موجودة في A والعناصر الموجودة في B معا .
- $A \cap B^C$ عناصر فراغ العينة الموجودة في A والغير موجودة في B معا .
- $A^C \cap B^C$ عناصر فراغ العينة الغير موجودة في A وB معا .

احتمال حدوث الحدث A = عدد عناصر الحدث A مقسوما على عدد عناصر فراغ العينة .

مثال: في تجربة رمي زهرة نرد مرة واحدة اذا كان لدينا الحدثان A وB معرفان كالتالي :

الحدث A يُشير الى العناصر الزوجية.

الحدث B يُشير الى عدد اقل من او يساوي 2 .

أوجد الحوادث التالية (لا حظ أن الرمز C هو نفسه الرمز '):

$$A , B, A^C , B^C, A \cup B \ , \ A \cap B \ , A^C \cap B , A \cap B^C , A^C \cap B^C, (A \cup B)^C , (A \cap B)^C$$

الحل : عدد عناصر فراغ العينة هو 6^1 , فراغ العينة لرمي زهرة نرد مرة واحدة هو $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{2,4,6\}, B = \{1,2\}, A^C = \{1,3,5\}, B^C = \{3,4,5,6\}, A \cup B = \{1,2,4,6\}, A \cap B = \{2\},$
$A^C \cap B = \{1\}, A \cap B^C = \{4,6\}, A^C \cap B^C = \{3,5\}, (A \cup B)^C = \{3,5\}, (A \cap B)^C = \{1,3,4,5,6\}$

مثال: للمثال السابق احسب الاحتمالات التالية:

$P(A), P(B), P\{A^C\}, P(B^C), P(A \cup B), P(A \cap B), P(A^C \cap B)$
$, P(A \cap B^C), P(A^C \cap B^C), P(A \cup B)^C, P(A \cap B)^C$

الحل :

من القانون العام : احتمال حدوث الحدث A = عدد عناصر الحدث A مقسوما على عدد عناصر فراغ العينة وهكذا مع باقي المطاليب.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad , \quad P\{A^C\} = \frac{n(A^C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B^C) = \frac{n(B^C)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$P(A^C \cap B) = \frac{n(A^C \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \quad , \quad P(A \cap B^C) = \frac{n(A \cap B^C)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A^C \cap B^C) = \frac{n(A^C \cap B^C)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad , P(A \cup B)^C = \frac{n(A \cup B)^C}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B)^C = \frac{n(A \cap B)^C}{n(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

مثال: في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة ، إذا عرفنا الحوادث A ، B ، C ، D كما يلي:

A ظهور عدد فردي ، B ظهور عدد زوجي ، C ظهور عدد يقبل القسمة على 3 ، D ظهور عدد أكبر من 2 .

اكتب عناصر كل من الحوادث السابقة ثم أوجد الحوادث التالية:

$$A', B', C', D', A \cap B, A \cap D, A \cup B, A \cup C$$

الحل:

فراغ العينة لرمي حجر النرد هو $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{1,3,5\}, \quad B = \{2,4,6\}, \quad C = \{3,6\}, \quad D = \{3,4,5,6\}$
$A' = \{2,4,6\}, B' = \{1,3,5\}, C' = \{1,2,4,5\}, D' = \{1,2\}, A \cap B = \{\emptyset\}, A \cap D = \{3,5\}$
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad A \cup C = \{1,3,5,6\}$

مثال: أوجد عدد عناصر فراغ العينة للتجارب التالية:

1. تجربة رمي قطعتي نقود.
2. تجربة رمي 3 قطع نقود.
3. تجربة رمي 3 زهرات نرد.
4. تجربة رمي قطعة نقود وزهرتي نرد.

الحل:

1. عدد العناصر هو: $2^2 = 4$
2. عدد العناصر هو : $2^3 = 8$
3. عدد العناصر هو : $6^3 = 216$
4. عدد العناصر هو: $2^1 \times 6^2 = 72$

مثال: لتجربة رمي حجر نرد وقطعة نقود, إكتب فراغ العينة للحوات التالية:

A : ظهور عدد زوجي على حجر النرد.

B : ظهور H على قطعة النقود.

C : ظهور H على قطعة النقود و عدد أقل من 3 على حجر النرد.

D : ظهور T على قطعة النقود وعدد لايقل عن 3 على حجر النرد.

ثم أحسب الأحداث التالية :

$$A^C, A \cap B, A \cup C, A \cap D^C, A \cap B^C, (A \cup C)^C, (A \cap B)^C$$

الحل :

$$\Omega = \{(H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H,5), (H,6), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$$

$$A = \{(H,2), (H,4), (H,6), (T,2), (T,4), (T,6)\}$$

$$B = \{(H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H,5), (H,6)\}$$

$$C = \{(H,1), (H,2)\}$$

$$D = \{(T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$$

$- A^C = \{(H,1), (H,3), (H,5), (T,1), (T,3), (T,5)\}$

$- A \cap B = \{(H,2), (H,4), (H,6)\}$

$- A \cup B = \{(H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H,5), (H,6), (T,2), (T,4), (T,6)\}$

$- A \cap D^C = \{(H,2), (H,4), (H,6), (T,2)\}$

$- A \cap B^C = \{(T,2), (T,4), (T,6)\}$

$-(A \cup C)^C = \{(H,3), (H,5), (T,1), (T,3), (T,5)\}$

$-(A \cap B)^C = \{(H,1), (H,3), (H,5), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$

مثال:

إذا كان:

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

احسب كلاً من:

1. $P(A \cup B)$, $P(A' \cup B')$, $P(A' \cap B')$
2. احتمال وقوع الحدث A فقط.
3. احتمال وقوع الحدث B فقط.
4. احتمال حدوث أيا منهما على الأقل.
5. احتمال عدم حدوث أيا من الحدثين.
6. احتمال حدوث واحد فقط من الحدثين A,B .

الحل:

1. $P(A \cup B)$, $P(A' \cup B')$, $P(A' \cap B')$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$P((A\cap B)') = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0.3 = 0.7$$

3. احتمال وقوع A وعدم وقوع B هو $P(A\cap B')$:

$$P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B) = 0.5 - 0.3 = 0.2$$

4. احتمال وقوع B وعدم وقوع A هو $P(A'\cap B)$:

$$P(B\cap A') = P(B) - P(A\cap B) = 0.7 - 0.3 = 0.4$$

5. احتمال وقوع A أو عدم وقوع B هو $P(A\cup B')$:

$$P(A\cup B') = P(A) + P(B') - P(A\cap B')$$

وبما أن: $P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.7 = 0.3$

فإن:

$$P(A\cup B') = 0.5 + 0.3 - 0.2 = 0.6$$

6. احتمال عدم وقوع A وعدم وقوع B هو $P(A'\cap B')$

$$P(A'\cap B') = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0.9 = 0.1$$

7. احتمال عدم وقوع A أو عدم وقوع B هو $P(A'\cup B')$

$$P(A'\cup B') = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0.3 = 0.7$$

مثال: في اختبارات الفصل الأول وجد أن نسبة النّجاح في الفيزياء تساوي 80% ونسبة النجاح في الكيمياء تساوي 70% ونسبة النجاح في المادّتين معا تساوي 60% ، اختير طالب بشكل عشوائي، أوجد:

1. احتمال أن يكون ناجحا في احدى المادّتين على الأقل.
2. احتمال أن يكون ناجحا في احدى المادّتين على الأكثر.
3. احتمال أن يكون ناجحا في الفيزياء وراسبا في الكيمياء.
4. احتمال أن يكون ناجحا في الفيزياء علما أنه ناجح في الكيمياء.
5. اذا كان ناجحا في الفيزياء، ما احتمال أن يكون راسبا في الكيمياء.
6. اذا كان راسبا في الفيزياء ، ما احتمال أن يكون راسبا في الكيمياء أيضا.

الحل: نفرض أن حدث نجاح الطالب في الفيزياء هو A و حدث نجاح الطالب في الكيمياء هو B وعليه:

$$P(A) = 0.8 \quad , \quad P(B) = 0.7 \quad , \quad P(A\cap B) = 0.6$$

1. احتمال أن يكون ناجحا في احدى المادّتين على الأقل:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.8 + 0.7 - 0.6 = 0.9$$

2. احتمال أن يكون ناجحا في احدى المادّتين على الأكثر:

$$P((A\cap B)') = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0.6 = 0.4$$

3. احتمال أن يكون ناجحا في الفيزياء وراسبا في الكيمياء:

$$P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B) = 0.8 - 0.6 = 0.2$$

4. احتمال أن يكون ناجحا في الفيزياء علما أنه ناجح في الكيمياء:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}$$

5. اذا كان ناجحا في الفيزياء، ما احتمال أن يكون راسبا في الكيمياء:

$$P(B'/A) = \frac{P(A\cap B')}{P(A)} = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4}$$

6. اذا كان راسبا في الفيزياء ، ما احتمال أن يكون راسبا في الكيمياء أيضا:

$$P(B'/A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1}{2}$$

مثال: إذا علمت أن عدد طلبة السنة الرابعة بكلية الطب 180 وأن 45 منهم يمارسون لعبة كرة القدم و36 منهم يمارسون لعبة كرة السلة و 6 يمارسون اللعبتين معا، فإذا تم اختيار أحد الطلبة بطريقة عشوائية فما احتمال أن يكون الطالب المختار يمارس إحدى اللعبتين على الأقل.

الحل:

$$P(A) = \frac{45}{180} = 0.25 \ , \qquad P(B) = \frac{36}{180} = 0.2 \ , \ P(A \cap B) = \frac{6}{180} = 0.033$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.2 - 0.033 = 0.417$$

مثال: إذ كان:

$$P(A \cap B') = \frac{1}{3} \ , \ P(B \cap A') = \frac{4}{15} \ , \quad P(B/A) = \frac{8}{15}$$

فأوجد الأتي:

$$P(A), P(A \cap B), P(B), P(A/B), P(A'/B), P(A/B'), P(A' \cap B'), P(A/(A \cup B))$$

الحل:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{8}{15} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{8}{15}.P(A) \quad ....(1)$$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B')$$

$$P(A \cap B) = P(A) - \frac{1}{3} \quad ....(2)$$

من 1 و 2 نجد أنه:

$$\frac{8}{15}.P(A) = P(A) - \frac{1}{3} \rightarrow P(A) - \frac{8}{15}.P(A) = \frac{1}{3} \rightarrow P(A)\left[1 - \frac{8}{15}\right] = \frac{1}{3} \rightarrow P(A) = \frac{5}{7}$$

$$P(A \cap B) = P(B/A) * P(A) = \frac{8}{15} * \frac{5}{7} = \frac{8}{21}$$

$$P(B \cap A') = \frac{4}{15} = P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(B) = \frac{4}{15} + P(A \cap B) = \frac{68}{105}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{8}{21}\right)}{\left(\frac{68}{105}\right)} = \frac{10}{17}$$

$$P(A'/B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{4}{15}\right)}{\left(\frac{68}{105}\right)} = \frac{7}{17}$$

$$P(A/B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(1 - \frac{68}{105}\right)} = \frac{35}{37}$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - \frac{103}{105} = \frac{2}{105}$$

$$P(A/(A\cup B)) = \frac{P(A\cap (A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P(A)}{P(A\cup B)} = \frac{\left(\frac{5}{7}\right)}{\left(\frac{103}{105}\right)} = \frac{75}{103}$$

مثال: تقدم طالبان لامتحان مادة الاحصاء، احتمال نجاح الأول 72% واحتمال نجاح الثاني 80% ، أوجد:

1. احتمال نجاحهما معا.
2. احتمال نجاح أحدهما على الأقل.

الحل: نفرض أن الحدث A هو نجاح الطالب الأول، بينما الحدث B يمثل نجاح الطالب الثاني، وعليه:

$$P(A) = 0.72 \quad , \quad P(B) = 0.80$$

1. احتمال نجاحهما معا:

حيث أن الحدثين A و B مستقلين فإنّ:

$$P(A\cap B) = P(A) * P(B) = 0.72 * 0.80 = 0.576$$

2. احتمال نجاح أحدهما على الأقل:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A) * P(B) = 0.72 + 0.80 - 0.576 = 0.944$$

مثال: إذا كان إحتمال نجاح طالب في مقرر ما هو $\frac{3}{4}$. ماهو إحتمال رسوبه في هذا المقرر؟

الحل: نرمز الى حدث نجاح الطالب بالرمز T

$$P(T) = \frac{3}{4} \quad \rightarrow P(T') = 1 - P(T) = \frac{1}{4}$$

مثال: أعلنت الجامعة عن حاجتها إلى عدد من الموظفين وبعد تصنيف المتقدمين لهذه الوظيفة وفقاً للمؤهل ولسنوات الخبرة حصلنا على الجدول التالي:

المجموع	لا يحمل شهادة جامعية(B)	يحمل شهادة جامعية(A)	
60	40	20	لديه خبرة(C)
40	30	10	ليس لديه خبرة(D)
100	70	30	المجموع

اخترنا شخصاً بصورة عشوائية:

1. ما احتمال أن يكون ممن يحملون شهادة جامعية.
2. ما احتمال أن يكون لديه خبرة و لا يحمل شهادة جامعية.

الحل: عدد نتائج التجربة وهي متساوية الفرص n(S)=100

1. احتمال أن يكون ممن يحملون شهادة جامعية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{100} = 0.3$$

2. احتمال أن يكون لديه خبرة ولا يحمل شهادة جامعية:

$$P(C\cap B) = \frac{n(C\cap B)}{n(S)} = \frac{40}{100} = 0.4$$

مثال: الجدول التالي يصنف 400 شخص حسب عادة التدخين ومستوى ضغط الدم كالتالي:

	D يدخن	D^C لا يدخن	المجموع
A ضغط مرتفع	40	10	50
B ضغط متوسط	70	130	200
C ضغط منخفض	55	95	150
المجموع	165	235	400

فإذا تم اختيار أحد هؤلاء الأشخاص بشكل عشوائي، حيث:

A : حادثة اختيار شخص ضغط دمه مرتفع.

D : حادثة اختيار شخص مدخن .

أوجد احتمال أن الشخص المختار:

1. ضغط دمه مرتفع.
2. مدخن.
3. ضغط دمه مرتفع و يدخن.
4. ضغط دمه مرتفع علما بأنه مدخن.

الحل: عدد نتائج التجربة وهي متساوية الفرص $n(S) = 400$.

1. احتمال أن ضغط دمه مرتفع:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{50}{400} = 0.125$$

2. احتمال أنه مدخن:

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{165}{400} = 0.4125$$

3. احتمال أن ضغط دمه مرتفع ومدخن:

$$P(A \cap D) = \frac{n(A \cap D)}{n(S)} = \frac{40}{400} = 0.1$$

4. احتمال أن ضغط دمه مرتفع علما بأنه مدخن:

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.1}{0.4125} = 0.2424$$

أو

$$P(A \mid D) = \frac{n(A \cap D)}{n(D)} = \frac{40}{165} = 0.2424$$

مثال: إذا كان $P(A \cap B') = 0.3, P(A \cap B) = 0.2, P(A \cup B) = 0.9$

احسب الإحتمالات التالية $P(A), P(B), P(A' \cap B'), P(B')$

الحل :

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \rightarrow 0.3 = P(A) - 0.2 \rightarrow P(A) = 0.5$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \rightarrow 0.2 = 0.5 + P(B) - 0.9 \rightarrow P(B) = 0.6$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.6 = 0.4$$

مثال: إذا كان إحتمال النجاح في مقرر A هو 0.6 و إحتمال النجاح في مقرر B هو 0.7 واحتمال النجاح في مقرر واحد على الأقل هو 0.9 . احسب الإحتمالات التالية:

1. إحتمال النجاح في مقرر A ومقرر B.

2. إحتمال النجاح في مقرر A فقط.

3. إحتمال النجاح في مقرر B وعدم النجاح في مقرر A.

4. إحتمال عدم النجاح في مقرر A ومقرر B.

5. إحتمال النجاح في مقرر B أو عدم النجاح في مقرر A.

الحل :

$$P(A) = 0.6 \quad P(B) = 0.7 \quad P(A \cup B) = 0.9$$

1. إحتمال النجاح في مقرر A ومقرر B:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.6 + 0.7 - 0.9 = 0.4$$

2. إحتمال النجاح في مقرر A فقط:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.4 = 0.2$$

3. إحتمال النجاح في مقرر B وعدم النجاح في مقرر A :

$$P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.4 = 0.3$$

4. إحتمال عدم النجاح في مقرر A ومقرر B :

$$P(B' \cap A') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1$$

5. إحتمال النجاح في مقرر B أو عدم النجاح في مقرر A :

$$P(B \cup A') = P(B) + P(A') - P(B \cap A') = 0.7 + 0.4 - 0.3 = 0.8$$

مثال: إذا كان $P(A \cup B) = \frac{2}{3}, P(A) = \frac{1}{2}$

فأوجد:

1. إحتمال B إذا كانت A و B حدثين متنافيين.

2. احتمال B إذا كان A و B حدثين مستقلين.

الحل:

1. إذا كانت A و B حدثين متنافيين فهذا يعني $[P(A \cap B) = 0]$ وبالتالي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \rightarrow P(B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

2. إذا كان A و B حدثين مستقلين فهذا يعني $[P(A \cap B) = P(A)P(B)]$ وبالتالي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = P(A) + P(B)[1 - P(A)]$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + P(B)\left[1 - \frac{1}{2}\right] \rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{2}P(B) \rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

مثال: إذا كان A و B حدثان مستقلان ، بحيث كان $P(A/B) = 0.35$ و $P(B/A) = 0.55$ فأوجد $P(A \cup B)$.

الحل:

بما أن الحدثان A و B مستقلان ، بالتالي: $P(A/B) = P(A) = 0.35$ و $P(B/A) = P(B) = 0.55$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$
$$= 0.35 + 0.55 - (0.35)(0.55) = 0.7075$$

مثال : إذا علم أن $P(A \cup B) = 0.8, P(A') = 0.6, P(B|A) = 0.25$

احسب $P(A), P(A \cap B), P(B), P(A' \cup B), P(A' \cap B'), P(A'|B')$

الحل :

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\rightarrow P(A\cap B)=P(B/A)\times P(A)=0.25\times 0.4=0.1$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\rightarrow P(B)=0.5$$

$$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)=0.6+0.5-[P(B)-P(A\cap B)]$$

$$=0.6+0.5-0.4=0.7$$

$$P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=1-0.8=0.2$$

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{0.2}{0.5}=0.4$$

مثال : إذا كان الحدثان A و B مستقلان وكان $P(A\cup B)=0.5$ و $P(A/B)=0.4$ فأوجد $P(B^C)$.

الحل:

بما أن الحدثان A و B مستقلان ، بالتالي: $P(A/B)=P(A)=0.4$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$0.5=0.4+P(B)-0.4P(B)$$

$$0.1=0.6P(B)\rightarrow P(B)=0.1666$$

$$P(B^C)=1-P(B)=1-0.1666=0.833$$

مثال: إذا علم أن $P(A)=0.3\ ,P(B)=0.6$

1. إذا كان $P(A\cup B)=0.9$ فإن الحدثتان A و B يكونان ....
2. إذا كان $P(A\cup B)=0.72$ فإن الحدثتان A و B يكونان ....

الحل: *1*. متنافيان   *2*. مستقلان.

مثال: إحتمال أن يحصل مشترك في مسابقة لتجويد القرآن وتفسيره على جائزة التجويد هو 0.16, وأن يحصل على جائزة التفسير هو 0.30, وإحتمال أن يحصل عليهما معاً هو 0.09 . أحسب:

1. إحتمال أن المشترك سوف لا يحصل على جائزة التجويد علماً أنه حصل على جائزة التفسير.
2. إحتمال أن المشترك سوف يحصل على جائزة التفسير علماً أنه لم يحصل على جائزة التجويد.

الحل : نفرض أن الحدث A يشير الى ان المتسابق سيحصل على جائزة التجويد.

نفرض أن الحدث B يشير الى ان المتسابق سيحصل على جائزة التفسير.

$$P(A)=0.16\qquad P(B)=0.30\qquad P(A\cap B)=0.09$$

1. إحتمال أن المشترك سوف لا يحصل على جائزة التجويد علماً أنه حصل على جائزة التفسير:

$$P(A'/B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.30-0.09}{0.30}=0.7$$

2. إحتمال أن المشترك سوف يحصل على جائزة التفسير علماً أنه لم يحصل على جائزة التجويد:

$$P(B/A')=\frac{P(A'\cap B)}{P(A')}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{0.30-0.09}{1-0.16}=0.25$$

مثال : إذا كان A و B حدثين مستقلين وكان $P(A|B)=0.3$, $P(B|A)=0.4$ فأوجد كلاً من:

$P(A),P(B),P(A\cap B),P(A'\cap B),P(A\cap B'),P(A'\cap B')$

الحل :

$$P(A)=P(A/B)=0.3$$

$$P(B)=P(B/A)=0.4$$

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$

$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.12 = 0.28$

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.12 = 0.18$

$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)] = 1 - 0.58 = 0.42$

مثال: إذا كان F و H حدثان مستقلان، بحيث كان $P(F) = 0.2$ و $P(H) = 2P(H^C)$ فأوجد $P(F \cup H)$.

الحل:

$$P(F \cup H) = P(F) + P(H) - P(F)P(H)$$

$$P(H) + P(H^C) = 1 \to 2P(H^C) + P(H^C) = 1 \to P(H^C) = \frac{1}{3}$$

$$P(H) = 1 - P(H^C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(F \cup H) = 0.2 + \frac{2}{3} - (0.2)\left(\frac{2}{3}\right) = 0.733$$

__التباديل والتوافيق:__

التباديل: وفيها يشترط الترتيب(لو بدلنا موضع الأشياء واختلف الوضع ففي هذه الحالة يُشترط الترتيب) .

أمثلة:

* اختيار 3 أرقام لتكوين عدد معيّن مثل(3،2،1) ، فالرقم 123 يختلف عن 213 ويختلف عن 231 .... ففي هذه الحالة الترتيب مهم.

* اختيار حروف لتكوين كلمة معينة مثل (أ،ب،د) فكلمة أبد تختلف عن كلمة بدأ .... ففي هذه الحالة الترتيب مهم.

* اختيار أشخاص من بين 7 لوظيفة رئيس ونائبه ، هنا الترتيب مهم (الرئيس، النائب) تختلف عن (النائب ، الرئيس).

التوافيق: وفيها لا يشترط الترتيب(لو بدلنا موضع الأشياء ولم يختلف الوضع ففي هذه الحالة لا يُشترط الترتيب).

أمثلة:

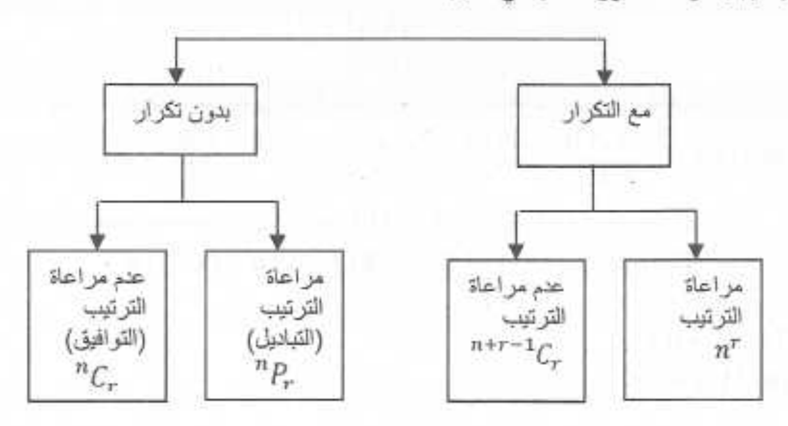
* اختيار 3 أشخاص من بين 6 أشخاص، فهنا الترتيب غير مهم (أحمد ، محمد ، علي) لن يختلف عن (محمد ، أحمد ، علي) فالمطلوب هو 3 أشخاص.

* اختيار 3 أشخاص من 6 أشخاص لشغل 3 وظائف متشابهة، هنا الترتيب غير مهم طالما أن الوظائف متشابهة.

* سحب 3 كرات من صندوق به عدة كرات متماثلة ، هنا الكرات متماثلة فلا يهم الترتيب.

* اختيار عددين فرديين من الأعداد الفردية مثل (3 ، 5) فلا يختلف عن (5 ، 3) فالمهم هو اختيار عددين.

عند سحب عيّنة يجب مراعاة الشروط التالية في الحل:



حيث $n \geq r$

مثال: كم طريقة يمكن بها اختيار شخصين من بين 7 أشخاص لشغل منصب المدير ونائبه.

الحل:

لاحظ هنا أن الترتيب مهم فمنصب المدير يختلف عن منصب النائب وبالتالي عدد الطرق هو:

$${}^{7}P_2 = 42$$

مثال: فصل مختلط من الجنسين به 9 ذكور و 6 إناث يُراد تكوين فريق مُكون من 4 أفراد من هذا الفصل بحيث يكون الفريق من نفس الجنس، بكم طريقة يمكن تكوين هذا الفريق؟

الحل:

فريق من نفس الجنس(إما 4 ذكور أو 4 إناث) لاحظ أن (أو) تعني (+)، أي أن:

$${}^{9}C_4 + {}^{6}C_4 = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} + \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = 141$$

مثال: اختير 3 أشخاص معا من مجموعة مكونة من 5 رجال و 4 نساء، أوجد كم طريقة يمكن بها اختيار الأشخاص الثلاثة في كل من الحالات الآتية:

1. إذا كان الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس.
2. إذا كان من بينهم اثنان فقط من نفس الجنس.

الحل:

1. إذا كان الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس(أي 3 ذكور أو 4 إناث):

$${}^{5}C_3 + {}^{4}C_3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} + \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 10 + 4 = 14$$

2. إذا كان من بينهم اثنان فقط من نفس الجنس أي(2 ذكور وأنثى أو 2 إناث و ذكر)لاحظ أن (و) تعني ضرب × .

$${}^{5}C_2\,{}^{4}C_1 + {}^{4}C_2\,{}^{5}C_1 = 40 + 30 = 70$$

مثال: تحتوي ورقة امتحان على 8 أسئلة وعلى الطالب أن يُجيب على 6 منها بشرط أن تتضمن سؤالين على الأقل من الأربعة الأولى، فكم طريقة يمكن بها للطالب اختيار الأسئلة.

الحل:

لاحظ أن الطرق ستكون(سؤالين من ال 4 الأولى و 4 أسئلة من ال 4 المتبقية أو 3 أسئلة من الأربعة الأولى و3 أسئلة من ال 4 المتبقية أو 4 أسئلة من الأربعة الأولى و سؤالين من ال 4 المتبقية).

$${}^{4}C_2\,{}^{4}C_4 + {}^{4}C_3\,{}^{4}C_3 + {}^{4}C_4\,{}^{4}C_2 = 28$$

مثال: يدرس الطالب بالسنة الأولى بإحدى الكليات الجامعية 8 مواد دراسية ولا يحق له الانتقال للسنة الثانية إلا إذا نجح في 6 منها على الأقل، فكم طريقة يمكن بها للطالب أن ينتقل للسنة الثانية.

الحل:

لاحظ أن الطرق ستكون(سينجح في 6 من ال 8 أو ينجح في 7 من ال 8 أو ينجح في 8 من ال 8)

$${}^{8}C_6 + {}^{8}C_7 + {}^{8}C_8 = 37$$

مثال: حقيبة بها 12 كرة حمراء وثمان كرات بيضاء ، فإذا سحبت منه 3 كرات حمراء و 2 كرات بيضاء ،بكم طريقة يمكن سحب الكرات في الحالات التالية:

1. مع التكرار والترتيب.
2. بدون تكرار مع الترتيب.
3. بدون تكرار وبدون ترتيب.

الحل:

1. مع التكرار والترتيب(مباشرة القانون n^r):

$$n^r = 12^3 \times 8^2 = 110592$$

2. بدون تكرار مع الترتيب(تباديل) أي (3 كرات حمراء من ال 12 كرة و 2 كرات بيضاء من ال 8 كرات):

$$^{12}P_3 \times {}^{8}P_2 = 73920$$

3. بدون تكرار وبدون ترتيب(توافيق):

$$^{12}C_3 \times {}^{8}C_2 = 6160$$

مثال: ماعدد طرق اختيار حرفين مختلفين أو 3 أحرف مختلفة معا من عناصر المجموعة (أ،ب،ج،د،ه،و).

الحل:

لاحظ أن المطلوب هو(اختيار حرفين مختلفين أو 3 أحرف مختلفة من 6 احرف).

$$^{6}C_2 + {}^{6}C_3 = 35$$

مثال: اشترك 12 لاعب في مسابقة للسباحة، بكم طريقة يمكن ترتيب المركز الأول والثاني والثالث.

الحل:

لاحظ هنا ان الترتيب مهم أي أن:

$$^{12}P_3 = 1320$$

مثال: كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجي وعددين فرديين من بين أربع أعداد زوجية وخمس أعداد فردية؟

الحل:

لاحظ أن المطلوب هو (اختيار عدد زوجي من بين 4 أعداد و عددين فرديين من بين 5 أعداد).

$$^{4}C_1 \times {}^{5}C_2 = 40$$

مثال: كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجي أوعددين فرديين من بين أربع أعداد زوجية وخمس أعداد فردية؟

الحل:

نفس المثال السابق ولكن الاختلاف هنا (اختيار عدد زوجي من بين 4 أعداد أو عددين فرديين من بين 5 أعداد).

$$^{4}C_1 + {}^{5}C_2 = 14$$

مثال: كم طريقة يمكن بها توزيع 8 جوائز بالتساوي على 4 طلاب؟

الحل:

(لاحظ هنا المطلوب هو ، أن يحصل الأول على جائزتين من ال 8 وأن يحصل الثاني على 2 جوائز من ال 6 المتبقية وان يحصل الثالث على 2 جوائز من ال 4 المتبقية وأن يحصل الأخير على ال 2 جوائز من ال 2 المتبقية).

$$^{8}C_2 \times {}^{6}C_2 \times {}^{4}C_2 \times {}^{2}C_2 = 2520$$

مثال: كم طريقة يمكن بها اختيار 3 أشخاص من بين 5 أشخاص؟

الحل:

$$^{5}C_3 = 10$$

مثال: كم طريقة يمكن بها اتخاذ لجنة للطلبة من بين 20 طالب و10 طالبات، بحيث تتكون اللجنة من 4 طلاب وطالبتين؟

الحل : $^{20}C_4 \times {}^{10}C_2 = 218025$

مثال: بكم طريقة يمكن تكوين فريق من 7 أعضاء من بين 9 بنات و5 أولاد بحيث يحتوي الفريق على 3 أولاد فقط؟

الحل : $^{5}C_3 \times {}^{9}C_4 = 1260$

مثال: بكم طريقة يمكن لخمس أشخاص الجلوس على 5 مقاعد في صف.

الحل: $^{5}P_5 = 120$

مثال: بكم طريقة يمكن يمكن لخمسة أشخاص الجلوس في دائرة.

الحل: $^{4}P_4 = 24$

مثال: إذا تم اختيار لجنة تتكون من 4 أعضاء من بين 12 شخصا فما احتمال اختيار شخصين معينين بهذه اللجنة.

الحل: نرمز إلى حدث اختيار شخصين معينين باللجنة بالرمز A ، وبالتالي عدد طرق اختيار شخصين معينين n(A) :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{^{10}C_2 \times {}^{1}C_1 \times {}^{1}C_1}{^{12}C_4} = 0.0909$$

مثال: إذا كان في أحد المستشفيات 30 ممرضة و10 ممرضين وأردنا اختيار اثنين منهم بطريقة عشوائية فما احتمال أن يكونا من جنسين مختلفين.

الحل: نرمز إلى حدث اختيار شخصين من جنسين مختلفين بالرمز A ، وعدد طرق اختيار الحدث A هو n(A) :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{^{10}C_1 \times {}^{30}C_1}{^{40}C_2} = 0.3846$$

مثال: يحتوي صندوق على 7 كرات حمراء و 8 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء ، سحبت كرتان معا فأوجد ما يأتي:

1.احتمال أن تكون الكرتان حمراوان. 2.احتمال ان تكون الكرتان بيضاوان. 3.احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون.

4.احتمال ان تكون الكرتان من لونين مختلفين.

الحل: لاحظ أن الصندوق يحوي 20 كرة ، لذلك فإن عدد طرق سحب كرتين معا هو:

$$n(\Omega) = {}^{20}C_2 = 190$$

1. بفرض A حدث كون الكرتين المسحوبتين حمراوان، عدد طرق A هوn(A) ويساوي:

$n(A) = {}^{7}C_2 = 21$ وبالتالي: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{21}{190} = 0.11$

2. بفرض B حدث كون الكرتين المسحوبتين بيضاوان، عدد طرق B هو n(B) ويساوي :

$n(B) = {}^{8}C_2 = 28$ وبالتالي: $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{28}{190} = 0.147$

3. بفرض C حدث أن الكرتين المسحوبتين سوداوين وبالتالي: $n(C) = {}^{5}C_2 = 10$

بفرض D حدث أن الكرتان من نفس اللون ،ويكون P(D):

$$P(D) = \frac{^{7}C_2 + {}^{8}C_2 + {}^{5}C_2}{^{20}C_2} = 0.31$$

4. بفرض E حدث أن الكرتان من لونين مختلفين وبالتالي:

$$P(E) = \frac{^{7}C_1\,{}^{8}C_1 + {}^{7}C_1\,{}^{5}C_1 + {}^{8}C_1\,{}^{5}C_1}{^{20}C_2} = 0.689$$

الاحتمال الكلي و نظرية بيز:

اذا كان فراغ العينة مكون من مجموعة الحوادث الشاملة $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ فانها تكون متنافية .

نفرض ان الحادثة B صفة مشتركة في جميع الحوادث الشاملة فان نظرية الاحتمال الكلي كالتالي :

$$P(B) = P(B \cap A1) + P(B \cap A2) + P(B \cap A3) + \ldots$$

$$P(B) = P(B/A1)P(A1) + P(B/A2)P(A2) + P(B/A3)P(A3) + \ldots$$

اما نظرية بيز فهي تنص على:

بشرط وقوع الحادثة B فما احتمال وقوعها من A_1 او A_2 او A_3 او .....

$$P(A1/B) \text{ OR } P(A2/B) \text{ OR } P(A3/B) \text{ OR} \ldots\ldots$$

حيث :

$$P(A1/B) = \frac{P(B/A1)P(A1)}{P(B)} \quad , P(A2/B) = \frac{P(B/A2)P(A2)}{P(B} \ldots\ldots$$

مثال : تنوي أسرة قضاء إجازة نهاية الأسبوع في أحد الأماكن السياحية A أو B أو C باحتمالات متساوية إذا كان إحتمال وقوع المطر في A هو 0.6 وفي B هو 0.7 وفي C هو 0.5 . إذا إختارت الأسرة مكان الإجازة عشوائياً أحسب:

1. إحتمال أن تقضي الأسرة إجازة ممطرة.
2. احتمال ان تقضي الاسرة اجازة غير ممطرة.
3. إذا علمت أن الأسرة قضت إجازة ممطرة , فما هو إحتمال أن إجازتها كانت في المكان A.
4. إذا علمت أن الأسرة قضت إجازة ممطرة , فما هو إحتمال أن إجازتها كانت في المكان B.
5. إذا علمت أن الأسرة قضت إجازة ممطرة , فما هو إحتمال أن إجازتها كانت في المكان C.
6. إذا علمت أن الأسرة لم تقضي إجازة ممطرة , فما هو إحتمال أن إجازتها كانت في المكان A.
7. إذا علمت أن الأسرة لم تقضي إجازة ممطرة , فما هو إحتمال أن إجازتها كانت في المكان B.
8. إذا علمت أن الأسرة لم تقضي إجازة ممطرة , فما هو إحتمال أن إجازتها كانت في المكان C.

الحل : M تشير الى وقوع المطر او الاجازة ممطرة (الصفة المشتركة)

$$P(M/A) = 0.6 \quad P(M/B) = 0.7 \quad P(M/C) = 0.5$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad , P(B) = \frac{1}{3} \quad , P(C) = \frac{1}{3}$$

1. إحتمال أن تقضي الأسرة إجازة ممطرة:

$$P(M) = P(M/A)P(A) + P(M/B)P(B) + P(M/C)P(C)$$

$$= 0.6 \times \frac{1}{3} + 0.7 \times \frac{1}{3} + 0.5 \times \frac{1}{3} = 0.6$$

2. احتمال ان تقضي الاسرة اجازة غير ممطرة ، يحل باحدى طريقتين :

الطريقة الاولى ناخذ المكملة حيث اننا في الفقرة رقم 1 حسبنا احتمال ان الاجازة ممطرة :

$$P(M^C) = 1 - P(M) = 1 - 0.6 = 0.4$$

الطريقة الأخري : نحسب احتمال انها اجازة غير ممطرة باستخدام قانون الاحتمال الكلي حيث نرمز الى كون الاجازة غير ممطرة بالرمز D .

$$P(D/A) = 1 - 0.6 = 0.4 \quad P(D/B) = 1 - 0.7 = 0.3 \quad P(D/C) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$P(D) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) + P(D/C)P(C)$$

$$= 0.4 \times \frac{1}{3} + 0.3 \times \frac{1}{3} + 0.5 \times \frac{1}{3} = 0.6 = 0.4$$

3. إذا علمت أن الأسرة قضت إجازة ممطرة , فان إحتمال أن إجازتها كانت في المكان A:

$$P(A/M) = \frac{P(M/A)P(A)}{P(M)} = \frac{0.6 \times \frac{1}{3}}{0.6} = \frac{1}{3}$$

4. إذا علمت أن الأسرة قضت إجازة ممطرة , فان إحتمال أن إجازتها كانت في المكان B:

$$P(B/M) = \frac{P(M/B)P(B)}{P(M)} = \frac{0.7 \times \frac{1}{3}}{0.6} = 0.3888$$

5. إذا علمت أن الأسرة قضت إجازة ممطرة , فإن إحتمال أن إجازتها كانت في المكان C:

$$P(C/M) = \frac{P(M/C)P(C)}{P(M)} = \frac{0.5 \times \frac{1}{3}}{0.6} = 0.277$$

6. إذا علمت أن الأسرة لم تقضي إجازة ممطرة , فإن إحتمال أن إجازتها كانت في المكان A:

$$P(A/D) = \frac{P(D/A)P(A)}{P(D)} = \frac{0.4 \times \frac{1}{3}}{0.4} = \frac{1}{3}$$

7. إذا علمت أن الأسرة لم تقضي إجازة ممطرة , فإن إحتمال أن إجازتها كانت في المكان B:

$$P(B/D) = \frac{P(D/B)P(B)}{P(D)} = \frac{0.3 \times \frac{1}{3}}{0.4} = \frac{1}{4}$$

8. إذا علمت أن الأسرة لم تقضي إجازة ممطرة , فإن إحتمال أن إجازتها كانت في المكان C:

$$P(C/D) = \frac{P(D/C)P(C)}{P(D)} = \frac{0.5 \times \frac{1}{3}}{0.4} = 0.4166$$

مثال : يوجد في مصنع للأدوية 3 آلات , تنتج الآلة الأولى 40% بينما تنتج الآلة الثانية 20% والباقي تنتجه الآلة الثالثة فاذا كانت نسبة الوحدات السليمة المنتجة من الآلة الأولى 99% ونسبة الوحدات السليمة المنتجة من الآلة الثانية 97 % ونسبة الوحدات السليمة المنتجة من الألى الثالثة 95% , اذا سحبت وحدة عشوائيا فأوجد :

1) احتمال انها سليمة . 2) احتمال انها معيبة . 3) اذا علمت انها سليمة فما احتمال انها انتجت من الآلة الأولى.

4) اذا علمت انها معيبة فما احتمال انها انتجت من الآلة الثالثة .

الحل : من مفهوم الاحتمال الكلي ونظرية بيز تلاحظ أن الفقرة 1 و 2 احتمال كلي بينما فقرة 3و4 نظرية بيز .

B تشير الى ان الوحدة سليمة ، D تشير الى ان الوحدة معيبة .

A1 حدث يشير إلى انتاج الوحدة من الآلة الأولى , A2 حدث يشير إلى انتاج الوحدة من الآلة الثانية , A3 حدث يشير إلى انتاج الوحدة من الآلة الثالثة .

$$P(A1) = 0.40 \quad , P(A2) = 0.20 \ , P(A3) = 0.40$$
$$P(B/A1) = 0.99 \ , P(B/A2) = 0.97 \ , P(B/A3) = 0.95$$
$$P(D/A1) = 0.01 \ , P(D/A2) = 0.03 \ , P(D/A3) = 0.05$$

1. احتمال انها سليمة:

$$P(B) = P(B/A1)P(A1) + P(B/A2)P(A2) + P(B/A3)P(A3)$$
$$= 0.99 \times 0.40 + 0.97 \times 0.2 + 0.95 \times 0.4 = 0.97$$

2. احتمال أنها معيبة:

$$P(D) = P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0.97 = 0.03$$

حل أخر باستخدام نظرية الاحتمال الكلي :

$$P(D) = P(D/A1)P(A1) + P(D/A2)P(A2) + P(D/A3)P(A3)$$
$$= 0.01 \times 0.40 + 0.03 \times 0.2 + 0.05 \times 0.4 = 0.03$$

3. اذا علمت انها سليمة فإن احتمال انها انتجت من الآلة الأولى:

$$P(A1/B) = \frac{P(B/A1)P(A1)}{P(B)} = \frac{(0.99 \times 0.40)}{0.97} = 0.4082$$

4. اذا علمت انها معيبة فإن احتمال انها انتجت من الألة الثالثة:

$$P(A3/D)=\frac{P(D/A3)P(A3)}{P(D)}=\frac{0.05\times 0.40}{0.03}=0.666$$

مثال : الجدول التالي يبين نتائج التحاليل الطبية لثلاثة مختبرات خلال فترة زمنية معينة مصنفة كالتالي:

نتيجة التحليل \ المختبر	A	B	C
خطأ (E)	5	2	3
صحيح (T)	25	28	27

1) اذا اختير مختبر عشوائي وسحب منه تحليل واحد فما احتمال ان يكون خطأ .

2) اذا علمت أن التحليل خطأ فما هو احتمال أنه سحب من المختبر A.

الحل : A ترمز الى المختبر الأول ، B ترمز الى المختبر الثاني ، C ترمز الى المختبر الثالث .

E تشير الى أن التحليل خطأ.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{(5+25)}{90}=\frac{1}{3}\quad ,P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{(2+28)}{90}=\frac{1}{3}\ ,$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)}=\frac{(3+27)}{90}=\frac{1}{3}$$

$$P(E/A)=\frac{n(E\cap A)}{n(A)}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}\qquad P(E/B)=\frac{n(E\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

$$P(E/C)=\frac{n(E\cap C)}{n(C)}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$$

1. اذا اختير مختبر عشوائي وسحب منه تحليل واحد فإن احتمال ان يكون خطأ:

$$P(E)=P(E/A)P(A)+P(E/B)P(B)+P(E/C)P(C)$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{3}=0.11111$$

2. اذا علمت أن التحليل خطأ فإن احتمال أنه سحب من المختبر A:

$$P(A/E)=\frac{P(E/A)P(A)}{P(E)}=\frac{1/6\times 1/3}{0.11111}=0.5$$

مثال: يعتمد تصدير النفط على ثلاثة موانئ رئيسية ، كل منها يصدر ما نسبته 35% ، 30% ، 35% ، واحتمال أن يتوقف أيا منها عن التصدير في أي يوم نتيجة للصراع المسلح الذي تشهده ليبيا هو 4% ، 2% ، 4% على التوالي ، فما احتمال الا يتوقف تصدير النفط في أي يوم.

الحل: A حدث أن التصدير من الميناء الأول حيث $P(A)=0.35$ ، B حدث أن التصدير من الميناء الثاني $P(B)=0.30$، C حدث أن التصدير من الميناء الثالث $P(C)=0.35$ ، D حدث توقف التصدير، M حدث عدم توقف التصدير.

$$P(M/A)=0.96\ ,\qquad P(M/B)=0.98\ ,\qquad P(M/C)=0.96$$

$$P(M)=P(M/A)P(A)+P(M/B)P(B)+P(M/C)P(C)$$

$$=0.96\times 0.35+0.98\times 0.30+0.96\times 0.35=0.966$$

مثال: من السؤال السابق ، ما احتمال أن يتوقف التصدير في أي يوم من الأيام .

الحل: من الحل السابق: $P(D)=1-P(M)=1-0.966=0.034$

المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها الاحتمالية

المتغير العشوائي : هو دالة ذات قيم حقيقية , تتحدد قيمته الممكنة نتيجة اجراء تجربة عشوائية و قيمه الممكنة هي مجموعة الأعداد الحقيقية R.

مثال : رميت قطعة عملة مرتين متتاليتين. اعتبر المتغير العشوائي X هو عدد الصور الناتجة. أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

الحل: فراغ العينة لرمي قطعة نقود مرتين متتاليتين هو:

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

وبالتالي فإن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X تكون:

X	0	1	1	2
	TT	HT	TH	HH

أي أن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور الناتجة يأخذ القيم (0،1،2).

مثال : عند القاء قطعة نقود 5 مرات اعتبر المتغير العشوائي X يمثل عدد الصور التي تظهر لأعلى , أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

الحل: هنا نلاحظ أن المتغير العشوائي X سيأخذ القيم (0،1،2،3،4،5).

مثال : المتغير العشوائي X يرمز الى الزمن الذي يمر قبل عطل جهاز طبي , أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

الحل: المتغير العشوائي X سيأخذ القيم: $(X > 0)$.

مثال : المتغير العشوائي Y يرمز الى عدد الوفيات خلال شهر , أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي Y.

الحل: المتغير العشوائي Y سيأخذ القيم: $(Y = 0,1,2, \dots)$.

المتغيرات العشوائية المنفصلة :

هو المتغير الذي تكون قيمه الممكنة قابلة للعد ويأخذ قيما منفصلة عن بعضها مثل :

المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد السيارات .

دالة الكتلة الإحتمالية (دالة التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل)

$X = x$	x_1	x_2	-	x_n
$f(x) = P(X = x)$	$f(x_1) = P(X = x_1)$	$f(x_2) = P(X = x_2)$	-	$f(x_n)$

هذا الجدول يسمى جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

حيث X هو المتغير العشوائي , بينما f(x) تسمى دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X ، حيث أن f(x) دالة موجبة ويجب ان تحقق الشرطين التاليين :

$$1)\ f(x) = P(X = x) \geq 0 \qquad\qquad 2)\ \sum f(x) = 1$$

مثال : أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور التي تظهر عند رمي قطعة متزنة مرتين.

الحل: فراغ العيّنة هو: $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$

عدد عناصر فراغ العينة 4.

عندما عدد الصور الناتجة يساوي صفر فالنتيجة هي {TT}أي أن$(X = 0)$ واحتمالها يكون $\left(P(X = 0) = \frac{1}{4}\right)$

عندما عدد الصور يساوي واحد فالنتيجة هي{HT, TH}أي أن$(X = 1)$ واحتمالها يكون$\left(P(X = 1) = \frac{2}{4}\right)$

عندما عدد الصور يساوي اثنان فالنتيجة هي{HH}أي أن$(X = 2)$ واحتمالها يكون$\left(P(X = 2) = \frac{1}{4}\right)$

والآن نضعها في صورة جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

$X = x$	0	1	2
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

مثال : أوجد قيمة الثابت C والتي تجعل الدوال التالية دوال كتلة إحتمالية.

.1

x	-2	-1	1	2
f(x)	5C	2C	3C	4C

.2 $f(x) = C(x + 1) \quad x = -1, 0, 1, 2, 3$

الحل:

1. حيث أنّ دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي دالة موجبة ويجب ان تحقق الشرطين التاليين :

$1)\ f(x) = P(X = x) \geq 0 \qquad 2) \sum f(x) = 1$

وبالتالي:

$$5C + 2C + 3C + 4C = 1 \rightarrow C = \frac{1}{14}$$

.2 $f(x) = C(x + 1) \quad x = -1, 0, 1, 2, 3$.

نقوم بإيجاد القيم التي تأخذها دالّة الكتلة الاحتمالية f(x) بدلالة C ، بالتعويض بقيم x في f(x) نحصل على:

x	-1	0	1	2	3
f(x)	0	C	2C	3C	4C

ومن خلال شرط دالّة كتلة الاحتمال:$\sum f(x) = 1$ نجد أنّ:

$$C + 2C + 3C + 4C = 1 \rightarrow C = \frac{1}{10}$$

مثال : اذا كان Y متغير عشوائي يتوزع كما يلي :

y	-2	-1	0	3	5
f(y)	0.1	0.3	K	0.2	0.15

-1 أوجد قيمة K ثم أوجد :

-2 $P(Y \geq -1)$

-3 $P(Y < 3)$

-4 $P(Y = 2\frac{1}{2})$

-5 $P(Y < 3\frac{1}{2})$

-6 $P(Y = -1)$

-7 $P(Y \geq 5)$

-8 $P(Y > 5)$

-9 $P(Y > -3)$

10- $P(-1 < Y < 2)$

11- $P(-1 \le Y < 2)$

12- $P(-1 < Y < 0)$

13- $P(Y \le 7)$

الحل:

.1

$$0.1 + 0.3 + K + 0.2 + 0.15 = 1 \rightarrow K = 1 - 0.75 = 0.25$$

.2

$$P(Y \ge -1) = 0.3 + 0.25 + 0.2 + 0.15 = 0.9$$

.3

$$P(Y < 3) = 0.1 + 0.3 + 0.25 = 0.65$$

.4

$$P\left(Y = 2\frac{1}{2}\right) = 0$$

.5

$$P\left(Y < 3\frac{1}{2}\right) = 0.1 + 0.3 + 0.25 + 0.2 = 0.85$$

.6

$$P(Y = -1) = 0.3$$

.7

$$P(Y \ge 5) = 0.15$$

.8

$$P(Y > 5) = 0$$

.9

$$P(Y > -3) = 1$$

.10

$$P(-1 < Y < 2) = 0.25$$

.11

$$P(-1 \le Y < 2) = 0.3 + 0.25 = 0.55$$

.12

$$P(-1 < Y < 0) = 0$$

.13

$$P(Y \le 7) = 1$$

مثال: إذا كانت الأسر بأحد المجتمعات التي لها طفلين موزعة كما يلي:

النوع	ولد،ولد	ولد،بنت	بنت،ولد	بنت،بنت
النسبة	%40	%10	%5	%45

فإذا تم اختيار أسرة لها طفلين بصورة عشوائية فأوجد :

1. احتمال ان يكون لها ولد واحد على الأقل.

2. احتمال أن يكون لها ولد واحد على الأكثر.

الحل:

1. احتمال ان يكون لها ولد واحد على الأقل:

$$P(X \geq 1) = 0.05 + 0.1 + 0.4 = 0.55$$

2. احتمال أن يكون لها ولد واحد على الأكثر:

$$P(X \leq 1) = 0.05 + 0.1 + 0.45 = 0.60$$

التوقع والتباين للمتغير العشوائي المنفصل:

1. **التوقع الرياضي:**

التوقع (أو المتوسط μ) للمتغير العشوائي X يرمز له بالرمز $E(X)$ أو μ_X ويعرف كما يلي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

حيث x القيم الممكنة للمتغير العشوائي و $f(x)$ دالة الكتلة الإحتمالية للمتغير العشوائي x.

خواص التوقع :

1) $E(C) = C$ حيث C عدد ثابت

2) $E(aX) = aE(X)$ حيث a عدد ثابت

3) $E(aX + C) = aE(X) + C$

4) $E(X^n) = \sum x^n f(x)$

2. **التباين للمتغير العشوائي المنفصل:**

تباين المتغير العشوائي X يرمز له بالرمز $V(X)$ أو σ_X^2

بأخذ الجذر التربيعي للتباين نحصل على الإنحراف المعياري ويرمز له بالرمز σ_X.

لحساب التباين نستخدم:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

حيث:

$E(X^2)$هو التوقع لـ X^2 ويعطى بالعلاقه:

$$E(X^2) = \sum_X x^2 f(x)$$

خواص التباين :

1) $V(C)=0$ لأي عدد ثابت C

2) $V(aX)=a^2V(X)$ حيث a عدد ثابت

3) $V(aX+C)= a^2V(X)$

مثال : احسب التوقع للمتغير العشوائي X والذي دالة كتلته الإحتمالية معطاة بالجدول.

x	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

الحل:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = (0)\left(\frac{1}{4}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (2)\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

مثال : للمتغير العشوائي X والذي دالة الكتلة الإحتمالية له هي:

$$f(x) = \frac{x^2}{30} \qquad x = 1, 2, 3, 4$$

1) احسب المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X .
2) اذا كانت Y= 2X-5 فأوجد E(Y) وكذلك E(-2X+3).
3) اذا كانت Y= 2X-5 فأوجد V(Y) وكذلك V(-2X+3).

الحل:

بالتعويض بقيم x في دالة كتلة الاحتمال f(x) نحصل على جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x كالتالي:

X = x	1	2	3	4
f(x)	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{8}{15}$

1. التوقع والتباين للمتغير العشوائي X:

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = (1)\left(\frac{1}{30}\right) + (2)\left(\frac{2}{15}\right) + (3)\left(\frac{9}{30}\right) + (4)\left(\frac{8}{15}\right) = 3.33$$

$$V(X) = E(X^2) - (\mu_X)^2$$

$$E(X^2) = \sum_X x^2 f(x) = (1)^2\left(\frac{1}{30}\right) + (2)^2\left(\frac{2}{15}\right) + (3)^2\left(\frac{9}{30}\right) + (4)^2\left(\frac{8}{15}\right) = 11.8$$

$$V(X) = 11.8 - (3.33)^2 = 0.711$$

2. اذا كانت Y= 2X-5 فإن E(Y) وكذلك E(-2X+3):

$$E(Y) = E(2X - 5) = 2E(X) - 5 = 2 \times 3.33 - 5 = 1.66$$

$$E(-2X + 3) = -2E(X) + 3 = -3.66$$

3. اذا كانت Y= 2X-5 فإن V(Y) وكذلك V(-2X+3):

$$V(Y) = V(2X - 5) = 4V(X) = 4 \times 0.711 = 2.844$$

$$V(-2X + 3) = 4V(X) = 2.844$$

مثال: المتغير العشوائي X والذي دالة الكتلة الإحتمالية له هي:

$$f(X) = \frac{X + 1}{6}, \quad x = 0, 1, 2$$

1) احسب التوقع والتباين والإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X .
2) اذا كانت (Y=3X-2) فأوجد V(Y).

الحل: بالتعويض بقيم x في دالة كتلة الاحتمال f(x) نحصل على جدول التوزيع الاحتمالي التالي:

X=x	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

1. التوقع والتباين والإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = (0)\left(\frac{1}{6}\right) + (1)\left(\frac{1}{3}\right) + (2)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{X} x^2 f(x) = (0)^2\left(\frac{1}{6}\right) + (1)^2\left(\frac{1}{3}\right) + (2)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3}$$

$$V(X) = \frac{7}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

2. اذا كانت $(Y=3X-2)$ فإن $V(Y)$:

$$V(Y) = V(3X-2) = 9V(X) = 5$$

مثال :اعتبر المتغير العشوائي X والذي له دالة الكتلة الإحتمالية $f(x)$ على النحو التالي:

X=x	-2	-1	0	1	3
$f(x) = P(X = x)$	0.1	C	0.3	0.2	0.2

1. أوجد قيمة C.
2. احسب الإحتمالات التالية:

$P(X \le 5)$

$P(X \le -1)$

$P(-1 \le X \le 2)$

$P(X > 1)$

$P(X = -3)$

$P(X > 5)$

الحل:

1. قيمة C :

$$0.1 + C + 0.3 + 0.2 + 0.2 = 1 \rightarrow C = 1 - 0.8 = 0.2$$

2. حساب قيم الاحتمالات:

$$P(X \le 5) = 1$$
$$P(X \le -1) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$
$$P(-1 \le X \le 2) = 0.2 + 0.3 + 0.2 = 0.7$$
$$P(X > 1) = 0.2$$
$$P(X = -3) = 0$$
$$P(X > 5) = 0$$

مثال : اذا كان X متغير عشوائي له دالة كتلة احتمال معرفة كما يلي :

X=x	0	1	4	9	16
P(X=x)	0.64	0.25	0.09	0.01	0.01

أوجد :

- $E(\sqrt{X})$ • $E(X^4)$
- $[E(X^2-4X)]^{\frac{1}{2}}$ • $E[X^2-2X+3\sqrt{X}-4]$ • $E(X-2\sqrt{X})$

الحل:

$$E(\sqrt{X})=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\,P(X=x_i)$$
$$=(\sqrt{0})(0.64)+(\sqrt{1})(0.25)|+(\sqrt{4})(0.09)+(\sqrt{9})(0.01)+(\sqrt{16})(0.01)=0.5$$
$$E(X^4)=\sum_{X}x^4P(X=x)=0^4(0.64)+1^4(0.25)+4^4(0.09)+9^4(0.01)+16^4(0.01)$$
$$=744.26$$
$$[E(X^2-4X)]^{\frac{1}{2}}=[E(X^2)-4E(X)]^{\frac{1}{2}}$$
$$E(X)=0\times0.64+1\times0.25+4\times0.09+9\times0.01+16\times0.01=0.86$$
$$E(X^2)=1\times0.25+16\times0.09+81\times0.01+256\times0.01=5.06$$
$$[E(X^2-4X)]^{\frac{1}{2}}=[5.06-(4\times0.86)]^{\frac{1}{2}}=1.272$$
$$E[X^2-2X+3\sqrt{X}-4]=E(X^2)-2E(X)+3E(\sqrt{X})-4$$
$$=5.06-(2\times0.86)+(3\times0.5)-4=0.84$$
$$E(X-2\sqrt{X})\ =E(X)-2E(\sqrt{X})=0.86-2\times0.5=-0.14$$

مثال: من جدول التوزيع الاحتمالي التالي:

X=x	0	1	2	3	4
P(X=x)	0.10	0.25	0.20	0.15	0.30

أوجد:

1. $P(X=3)$.
2. القيمة المتوقعة للمتغير $Y=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$.
3. اذا كان $Y=\frac{X}{\sigma_X}$ فأوجد $V(Y)$.
4. اذا كانت $Y=X-E(X)$ فأوجد $E(Y)$.
5. اذا كان $Y=\frac{1}{\sigma_X}(X-\mu)$ فاأوجد $E(Y)$ و $V(Y)$.

الحل:

1. $P(X=3)=0.15$
2. القيمة المتوقعة للمتغير $Y=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$:

$$E(Y)=E\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)=\frac{1}{\sigma_X}[E(X)-\mu_X]=0$$

3. اذا كان $Y=\frac{X}{\sigma_X}$ فان $V(Y)$:

$$V(Y) = V\left(\frac{X}{\sigma_X}\right) = \left(\frac{1}{\sigma_X}\right)^2 V(X) = 1$$

4. اذا كانت $Y=X-E(X)$ فأوجد $E(Y)$:

$$E(Y) = E[X - E(X)] = E(X) - E(X) = 0$$

5. اذا كان $Y = \frac{1}{\sigma_X}(X - \mu)$ فإن $E(Y)$ و $V(Y)$:

$$E(Y) = E\left[\frac{1}{\sigma_X}(X - \mu)\right] = \frac{1}{\sigma_X}E(X) - \frac{1}{\sigma_X}\mu = 0$$

$$V(Y) = V\left[\frac{1}{\sigma_X}(X - \mu)\right] = \left(\frac{1}{\sigma_X}\right)^2 V(X) = 1$$

مثال: اذا كان X متغير عشوائي يأخذ القيم 4 3 1 0 -2 باحتمالات متساوية، اوجد التباين و الانحراف المعياري للدالة $g(X) = 4X - 7$

الحل:

x	-2	0	1	3	4
P(X=x)	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

$$V[g(X)] = V[4X - 7] = 16V(X)$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X^2) = 4 \times 0.2 + 1 \times 0.2 + 9 \times 0.2 + 16 \times 0.2 = 6$$

$$E(X) = -2 \times 0.2 + 1 \times 0.2 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.2 = 1.2$$

$$V(X) = 6 - (1.2)^2 = 4.56$$

$$V[g(X)] = 16 \times 4.56 = 72.96 \qquad \sigma_{g(x)} = \sqrt{V[g(X)]} = \sqrt{72.96} = 8.54$$

توزيع ذي الحدين : يستخدم هذا التوزيع في التجارب التي يمكن تصنيف جميع نتائجها إلى نتيجتين فقط :

نجاح (الحدث الذي يهمنا) , الفشل (الحدث الأخر).

فإذا رمزنا لاحتمال وقوع النجاح بـ p والفشل بـ q والذي يساوي (1-p) وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات النجاح فإن دالة الكتلة الإحتمالية تعطى بالعلاقة :

$$f(x) = C_x^n p^x (q)^{n-x} \quad x = 0,1,2, \ldots\ldots n$$

حيث يرمز لتوزيع ذي الحدين بمعلمتين (n,p) بالرمز $X \sim Bin(n, p)$

التوقع (المتوسط) والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع ذي الحدين يعطى بالعلاقات :

$$E(X) = \mu_x = np$$

بينما يعطى التوقع لمربع المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع ذي الحدين بالعلاقة:

$$E(X^2) = n^2P^2 + npq$$

وبالتالي يكون التباين $V(X)$ والانحراف المعياري σ_x للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع ذي الحدين كالتالي:

$$V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = (n^2P^2 + npq) - n^2P^2 = nPq$$

$$\sigma_x = \sqrt{npq}$$

مثال: إذا كان X متغير عشوائي بحيث $X \sim Bin(4,0.2)$ فأجد:

$$P(X \geq 1) \; , \quad P(X = 2)$$

الحل:

$$n = 4 \;,\; P = 0.2 \;,\; q = 0.8$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_0^4 (0.2)^0 (0.8)^{4-0} = 0.5904$$

$$P(X = 2) = C_2^4 (0.2)^2 (0.8)^{4-2} = 0.1536$$

مثال: اذا كان إحتمال فوز طالبة من كلية العلوم في المسابقة الثقافية هو 0.8 . إشتركت 5 طالبات في هذه المسابقة.

1. أوجد جدول التوزيع الاحتمالي لعدد الطالبات الفائزات.
2. ما إحتمال عدم فوز أي طالبة منهن.
3. ما إحتمال فوز طالبتين منهن.
4. ما إحتمال فوز طالبة على الأقل.
5. ما إحتمال فوز طالبتين على الأكثر.
6. إحسب التوقع والإنحراف المعياري لعدد الطالبات الفائزات.
7. إحسب التوقع والإنحراف المعياري لعدد الطالبات الغير فائزات.

الحل:

نفرض أن احتمال فوز الطالبة P حيث $P = 0.8$، واحتمال فشل الطالبة q حيث $q = 0.2$، والمتغير العشوائي X يرمز لعدد الطالبات الفائزات.

$$f(x) = P(X = x) = C_x^n p^x (q)^{n-x} \quad x = 0,1,2,3,4,5$$

$$P(X = 0) = C_0^5 p^0 (q)^{5-0} = 1 * 1 * 0.00032 = 0.00032$$

$$P(X = 1) = C_1^5 p^1 (q)^{5-1} = 5 * 0.8 * 0.0016 = 0.0064$$

$$P(X = 2) = C_2^5 p^2 (q)^{5-2} = 10 * 0.64 * 0.008 = 0.0512$$

$$P(X = 3) = C_3^5 p^3 (q)^{5-3} = 10 * 0.512 * 0.04 = 0.2048$$

$$P(X = 4) = C_4^5 p^4 (q)^{5-4} = 5 * 0.4096 * 0.2 = 0.4096$$

$$P(X = 5) = C_5^5 p^5 (q)^{5-5} = 1 * 0.32768 * 1 = 0.32768$$

1. جدول التوزيع الاحتمالي لعدد الطالبات الفائزات:

x	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.00032	0.0064	0.0512	0.2048	0.4096	0.32768

2. إحتمال عدم فوز أي طالبة منهن:

$$P(X = 0) = C_0^5 p^0 (q)^{5-0} = 1 * 1 * 0.00032 = 0.00032$$

3. إحتمال فوز طالبتين منهن:

$$P(X = 2) = C_2^5 p^2 (q)^{5-2} = 10 * 0.64 * 0.008 = 0.0512$$

4. إحتمال فوز طالبة على الأقل:

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$= C_1^5 p^1 (q)^{5-1} + C_2^5 p^2 (q)^{5-2} + C_3^5 p^3 (q)^{5-3} + C_4^5 p^4 (q)^{5-4} + C_5^5 p^5 (q)^{5-5}$$
$$= 0.99968$$

أو بطريقة أخرى:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.00032 = 0.99968$$

5. إحتمال فوز طالبتين على الأكثر:

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$= C_0^5 p^0 (q)^{5-0} + C_1^5 p^1 (q)^{5-1} + C_2^5 p^2 (q)^{5-2} = 0.05792$$

6. **التوقع والإنحراف المعياري لعدد الطالبات الفائزات:**

نفرض أن احتمال فوز الطالبة P حيث P=0.8

$$E(X) = np = 5 * 0.8 = 4$$
$$\sigma_x = \sqrt{npq} = \sqrt{(5)(0.8)(0.2)} = 0.894$$

7. **التوقع والإنحراف المعياري لعدد الطالبات الغير فائزات:**

نفرض أن احتمال خسارة الطالبة P حيث P=0.2

$$E(X) = np = 5 * 0.2 = 1$$
$$\sigma_x = \sqrt{npq} = \sqrt{(5)(0.8)(0.2)} = 0.894$$

مثال: إذا كان 20% من إنتاج المصنع هو إنتاج تالف, أخذت عينة من 4 وحدات، أوجد الإحتمالات التالية:

1. الوحدات المختارة تالفة.
2. على الأكثر توجد وحدتين تالفتين.
3. 3 من الوحدات المختارة جيدة.
4. التوقع والانحراف المعياري لعدد الوحدات التالفة.
5. التوقع والانحراف المعياري لعدد الوحدات الجيدة.

الحل:

1. احتمال أن الوحدات المختارة تالفة:

نفرض أن نسبة الإنتاج التالف P حيث $P = 0.20$ بينما نسبة الإنتاج الجيد هو q حيث $q = 0.80$ والمتغير العشوائي X يرمز إلى عدد الوحدات التالفة.

$$P(X=4) = C_4^4 p^4 (q)^{4-4} = 1 * 0.2^4 * 0.8^{(4-4)} = 0.0016$$

2. على الأكثر توجد وحدتين تالفتين:

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$= C_0^4 p^0 (q)^{4-0} + C_1^4 p^1 (q)^{4-1} + C_2^4 p^2 (q)^{4-2}$$
$$= C_0^4 0.2^0 (0.8)^{4-0} + C_1^4 0.2^1 (0.8)^{4-1} + C_2^4 0.2^2 (0.8)^{4-2} = 0.9728$$

3. 3 من الوحدات المختارة جيدة :

نفرض أن نسبة الإنتاج الجيد P حيث $P = 0.80$ بينما نسبة الإنتاج التالف هي q حيث $q = 0.2$ والمتغير العشوائي x يرمز إلى عدد الوحدات الجيدة.

$$P(X=3) = C_3^4 p^3 (q)^{4-3} = C_3^4 (0.8)^3 (0.2)^{4-3} = 0.4096$$

4. التوقع والانحراف المعياري لعدد الوحدات التالفة:

نفرض أن نسبة الإنتاج التالف P حيث $P = 0.20$ بينما نسبة الإنتاج الجيد هي q حيث $q = 0.80$.

$$E(X) = np = 4 * 0.2 = 0.8$$
$$\sigma_x = \sqrt{npq} = \sqrt{(4)(0.2)(0.8)} = 0.8$$

5. التوقع والانحراف المعياري لعدد الوحدات الجيدة:

نفرض أن نسبة الإنتاج الجيد P حيث $P = 0.80$ بينما نسبة الإنتاج التالف هي q حيث $q = 0.20$.

$$E(X) = np = 4 * 0.8 = 3.2$$

$$\sigma_x = \sqrt{npq} = \sqrt{(4)(0.8)(0.2)} = 0.8$$

مثال : إذا كان 7% من الأشخاص المسافرين عبر المحيط الأطلنطي يصابون بدوار البحر, أخذت عينة من 5 أشخاص مسافرين عبر المحيط الأطلنطي.

1. اكتب دالة الكتلة الإحتمالية لعدد الأشخاص في العينة الذين يصابون بدوار البحر.
2. إحتمال أن يصاب ثلاثة منهم بدوار البحر .
3. إحتمال أن يصاب أربعة على الأكثر بدوار البحر.
4. إحتمال أن لا يصاب أربعة منهم بدوار البحر.
5. متوسط الأشخاص الذين يصابون بدوار البحر.
6. التباين لعدد الأشخاص الذين يصابون بدوار البحر.

الحل:

1. دالة الكتلة الإحتمالية لعدد الأشخاص في العينة الذين يصابون بدوار البحر:

نفرض أن نسبة الأشخاص الذين يصابون بدوار البحر P حيث $P = 0.07$ ، و نسبة الأشخاص الذين لا يصابون بدوار البحر q حيث $q = 0.93$، والمتغير العشوائي X يرمز لعدد الأشخاص الذين يصابون بدوار البحر.

$f(x) = P(X = x) = C_x^n p^x (q)^{n-x} \quad x = 0,1,2,3,4,5$

$P(X = 0) = C_0^5 p^0 (q)^{5-0} = 0.6956$

$P(X = 1) = C_1^5 p^1 (q)^{5-1} = 0.2618$

$P(X = 2) = C_2^5 p^2 (q)^{5-2} = 0.0394$

$P(X = 3) = C_3^5 p^3 (q)^{5-3} = 0.002966$

$P(X = 4) = C_4^5 p^4 (q)^{5-4} = 0.00011$

$P(X = 5) = C_5^5 p^5 (q)^{5-5} = 1.68 \times 10^{-6}$

X=x	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.6956	0.2618	0.0394	0.002966	0.00011	1.68×10^{-6}

2. احتمال أن يصاب ثلاثة منهم بدوار البحر هو:

$$P(X = 3) = C_3^5 p^3 (q)^{5-3} = 0.002966$$

3. احتمال أن يصاب أربعة على الأكثر بدوار البحر:

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

أو تساوي:

$$\{1 - P(X = 5)\} = 1 - C_5^5 p^5 (q)^{5-5} = 1 - 1.68 \times 10^{-6} = 0.999$$

4. احتمال أن لا يصاب أربعة منهم بدوار البحر:

بعكس الفرضية ، نفرض أن نسبة الأشخاص الذين لا يصابون بدوار البحر P حيث $P = 0.93$، و نسبة الأشخاص الذين يصابون بدوار البحر q حيث $q = 0.07$، والمتغير العشوائي x يرمز لعدد الأشخاص الذين لا يصابون بدوار البحر.

$$\{P(X = 4)\} = C_4^5 p^4 (q)^{5-4} = 0.2618$$

5. متوسط الأشخاص الذين يصابون بدوار البحر.

$P = 0.07$ ، $q = 0.93$

$$\mu_X = E(X) = np = 5 * 0.07 = 0.35$$

6. التباين لعدد الأشخاص الذين يصابون بدوار البحر.

$$V(X) = npq = 5 * 0.07 * 0.93 = 0.3255$$

مثال : اذا كانت نسبة المصابين بعمى الألوان في مجتمع ما هي 20% فأوجد :

1- التوزيع الاحتمالي لعدد المصابين بعمى الألوان في أسرة مكونة من 4 أفراد من هذا المجتمع.

2- احتمال أن يكون عدد غير المصابين بعمى الألوان أكبر من 3 وأقل من 4 .

3- ما هو متوسط وتباين التوزيع الاحتمالي في الفقرة 1 .

الحل:

1. التوزيع الاحتمالي لعدد المصابين بعمى الألوان في أسرة مكونة من 4 أفراد من هذا المجتمع:

نفرض أن نسبة الأشخاص الذين يصابون بعمى الألوان P حيث $P = 0.20$ ، و نسبة الأشخاص الغير مصابين بعمى الألوان q حيث $q = 0.80$، والمتغير العشوائي X يرمز لعدد الأشخاص المصابين بعمى الألوان:

$f(x) = P(X = x) = C_x^n p^x (q)^{n-x} \quad x = 0,1,2,3,4$

$P(X = 0) = C_0^4 p^0 (q)^{4-0} = 0.4096$

$P(X = 1) = C_1^4 p^1 (q)^{4-1} = 0.4096$

$P(X = 2) = C_2^4 p^2 (q)^{4-2} = 0.1536$

$P(X = 3) = C_3^4 p^3 (q)^{4-3} = 0.0256$

$P(X = 4) = C_4^4 p^4 (q)^{4-4} = 0.0016$

x	0	1	2	3	4
P(X = x)	0.4096	0.4096	0.1536	0.0256	0.0016

2. احتمال أن يكون عدد غير المصابين بعمى الألوان أكبر من 3 وأقل من 4 :

$$P(3 < X < 4) = 0$$

3. ما هو متوسط وتباين التوزيع الاحتمالي في الفقرة 1 :

$$\mu_X = E(X) = np = 4 * 0.20 = 0.8$$

$$V(X) = npq = 4 * 0.20 * 0.80 = 0.64$$

مثال : في إحدى الدراسات وجد أن 15% من الناس يستخدمون اليد اليسري في الكتابة , في عينة حجمها عشرة اشخاص سحبت من هذا المجتمع ، أوجد :

1. احتمال شخصين يستخدمان اليد اليسري .

2. احتمال على الأقل اثنان يستخدمان اليد اليسرى.

3. احتمال على الأكثر ثلاثة يستخدمون اليد اليسرى.

4. احتمال 8 أشخاص على الأكثر يستخدمون اليد اليمنى.

الحل:

1. احتمال شخصان يستخدمون اليد اليسري:

نفرض أن نسبة الأشخاص الذين يستخدمون اليد اليسرى في الكتابة P حيث $P = 0.15$ ، و نسبة الأشخاص الذين يستخدمون اليد اليمنى هي q حيث $q = 0.85$، والمتغير العشوائي X يرمز لعدد الأشخاص الذين يستخدمون اليد اليسرى.

$$P(X = 2) = C_2^{10} p^2 (q)^{10-2} = 0.276$$

2. احتمال على الأقل اثنان يستخدمان اليد اليسرى:

$$P\ (X \geq 2) = 1 - P\ (X < 2) = 1 - [P\ (X = 0) + P\ (X = 1)]$$
$$= 1 - [C_0^{10} p^0 (q)^{10-0} + C_1^{10} p^1 (q)^{10-1}] = 0.4557$$

3. احتمال على الأكثر ثلاثة أشخاص يستخدمون اليد اليسرى:

$$P\ (X \leq 3) = P\ (X = 0) + P\ (X = 1) + P\ (X = 2) + P\ (X = 3)$$
$$C_0^{10} p^0 (q)^{10-0} + C_1^{10} p^1 (q)^{10-1} + C_2^{10} p^2 (q)^{10-2} + C_3^{10} p^3 (q)^{10-3} = 0.95$$

4. احتمال 8 أشخاص على الأكثر يستخدمون اليد اليمنى:

هنا نفرض أن نسبة الأشخاص الذين يستخدمون اليد اليمنى هي p حيث $P = 0.85$ بينما نسبة الأشخاص الذين يستخدمون اليد اليسرى في الكتابة هي q حيث $q = 0.15$ ، والمتغير العشوائي X يرمز لعدد الأشخاص الذين يستخدمون اليد اليمنى في الكتابة.

$$P\ (X \leq 8) = 1 - P\ (X > 8) = 1 - [P\ (X = 9) + P\ (X = 10)]$$
$$= 1 - [C_9^{10} p^9 (q)^{10-9} + C_{10}^{10} p^{10} (q)^{10-10}] = 1 - [0.544] = 0.4557$$

مثال : إذا كان المتغير العشوائي X يتوزع بتوزيع ذي الحدين حيث: $\sigma^2 = \frac{15}{4}$, $\mu = 5$ أوجد قيمة n , p ثم أوجد $.P(X > 2)$

الحل:

$$E(X) = \mu = np = 5 \quad (1)$$
$$\sigma^2 = npq = \frac{15}{4} \quad (2)$$

من 1 و 2 نجد أن: $q = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

$$P + q = 1 \rightarrow P = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$
$$np = 5 \quad \rightarrow n = \frac{5}{P} = 20$$
$$P(X > 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$
$$= 1 - \left[C_0^{20} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{20} + C_1^{20} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^{19}\right] = 0.9756$$

مثال : اذا علمت أن 75% من الدارسين بالكلية في احدى الجامعات هم من الذكور ، اخذت عينة عشوائية حجمها 30 شخص من بين الدارسين في هذه الجامعة فما احتمال وجود 8 اناث في هذه العينة .

الحل: نفرض أن نسبة الإناث في العينة P حيث $P = 0.25$ ، و نسبة الذكور في العينة هي q حيث $q = 0.75$، والمتغير العشوائي X يرمز لعدد الإناث في العينة.

$$P\ (X = 8) = C_8^{30} p^8 (q)^{30-8} = 0.1593$$

مثال : بينت دراسة صحية ان نسبة العمال المصابين بمرض الربو من بين العاملين في مركز طبي هي 2% , سحبت عينة عشوائية حجمها 1500 شخص من العاملين فاوجد العدد المتوقع لغير المصابين بمرض الربو .

الحل:

نفرض أن نسبة الغير مصابين بالربو في العينة P حيث $P = 0.98$.

$$E(X) = \mu = 1500 * 0.98 = 1470$$

مثال : اذا كان X متغير عشوائي له دالة كتلة الاحتمال التالية :

$$P(X=x)=\frac{40!}{x!\,(40-x!)}(0.9)^{x}(0.1)^{40-x} \qquad x=0,1,2\ldots\ldots40$$

فاوجد:

1. $E(X)$
2. $V(X)$
3. $P(X=40)$
4. $P(X\leq 39)$

الحل:

نلاحظ أن صيغة دالة كتلة الاحتمال مطابقة لصيغة توزيع ذي الحدين، أي أن $P=0.9, q=0.1, n=40$.

1. $E(X)$:

$$E(X)=np=40*0.9=36$$

2. $V(X)$:

$$V(X)=npq=40*0.9*0.1=3.6$$

3. $P(X=40)$

$$P\ (X=40)=C_{40}^{40}p^{40}(q)^{40-40}=0.0147$$

4. $P(X\leq 39)$

$$P\ (X\leq 39)=1-P(X>39)=1-P(X=40)=0.9852$$

توزيع بواسون

هو توزيع لمتغير كمي منفصل يمثل عدد مرات حدوث حدث عشوائي في فترة زمنية محددة أو مكان محدد .

أمثلة: عدد المرضى الذين يدخلون حجرة الإنتظار في عيادة خاصة خلال ساعة.

عدد حوادث المرور في أحد الميادين خلال اليوم.

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات حدوث حدث ما خلال فترة زمنية محددة أو مساحة مكانية محددة فإن المتغير X يكون له توزيع بواسون بمتوسط λ وتكون دالة كتلته الإحتمالية على الصورة:

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad x=0,1,2,\ldots$$

λ هي معلمة توزيع بواسون وهي أيضاً تمثل متوسط وتباين بواسون وهي عبارة عن معدل الحدوث في الفترة الزمنية او في المساحة المعينة او .... ونقول $X\sim P(\lambda)$

التوقع والتباين والانحراف المعياري لتوزيع بواسون :

المتوسط (التوقع) يساوي معدل الحدوث $\mu_{x}=E(X)=\lambda$

بينما التوقع لمربع المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بواسون يعطى بالعلاقة:

$$E(X^{2})=\lambda^{2}+\lambda$$

وبالتالي فإن التباين للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بواسون يكون:

$$V(X)=\sigma_{X}^{2}=E(X^{2})-[E(X)]^{2}=(\lambda^{2}+\lambda)-\lambda^{2}=\lambda$$

الإنحراف المعياري يساوي $\sqrt{\lambda}$.

مثال : إذا كان X هو عدد الحالات الطارئه التي يستقبلها أحد المستشفيات خلال ليلة واحدة متغير عشوائي له توزيع بواسون ($\lambda=3$) فأوجد :

1. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .
2. إحتمال أن يستقبل المستشفى 4 حالات طارئه خلال ليلة واحدة .
3. إحتمال أن يستقبل المستشفى 4 حالات طارئه خلال 3 ليالي.
4. إحتمال أن يستقبل المستشفى أقل من حالتين طارئتين خلال ليلة واحدة .
5. إحتمال أن لا يستقبل المستشفى أي حالة طارئه خلال ليلة واحدة .
6. متوسط عدد الحالات الطارئه التي يستقبلها المستشفى خلال ليلة واحدة.
7. متوسط عدد الحالات الطارئه التي يستقبلها المستشفى خلال 3 ليالي.
8. التباين والانحراف المعياري لعدد الحالات الطارئه التي يستقبلها المستشفى خلال ليلة واحدة.

الحل:

1. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

X=x	0	1	2	....
f(x)=P(X=x)	0.04978	0.1493	0.224	....

2. إحتمال أن يستقبل المستشفى 4 حالات طارئه خلال ليلة واحدة:

$$P(X = 4) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-3}3^{4}}{4!} = 0.168$$

3. إحتمال أن يستقبل المستشفى 4 حالات طارئه خلال 3 ليالي:

في هذه الحالة نجد قيمة المتوسط (λ) الجديدة:

ليلة واحدة ← $\lambda = 3$

3ليالي ← $\lambda =$ ؟

$$\lambda = \frac{3 * 3}{1} = 9$$

$$P(X = 4) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-9}9^{4}}{4!} = 0.0337$$

4. إحتمال أن يستقبل المستشفى أقل من حالتين طارئتين خلال ليلة واحدة:

$$P(X < 2) = [P(X = 0) + P(X = 1)] = \frac{e^{-3}3^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}3^{1}}{1!} = 0.199$$

5. إحتمال أن لا يستقبل المستشفى أي حالة طارئه خلال ليلة واحدة:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3}3^{0}}{0!} = \frac{e^{-3}3^{0}}{0!} = 0.0497$$

6. متوسط عدد الحالات الطارئه التي يستقبلها المستشفى خلال ليلة واحدة:

$$\mu_X = \lambda = 3$$

7. متوسط عدد الحالات الطارئه التي يستقبلها المستشفى خلال 3 ليالي:

$$\mu_X = \lambda = 9$$

8. التباين والانحراف المعياري لعدد الحالات الطارئه التي يستقبلها المستشفى خلال ليلة واحدة:

$$V(X) = \lambda = 3$$

$$\sigma_X = \sqrt{3}$$

مثال: إذا كان متوسط عدد الحوادث اليومية على إحدى الطرق هو حادثين ، فما احتمال وقوع 3 حوادث في أحد الأيام؟

الحل:

$$\lambda = 2$$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-2}2^{3}}{3!} = 0.180$$

مثال: إذا كان معدل وقوع الزلازل في إحدى الدول هو زلزالين في السنة، احسب:

1. احتمال وقوع 3 زلازل في أحد السنين.
2. احتمال وقوع 5 زلازل خلال سنتين.
3. المتوسط والتباين في الحالة 2.

الحل:

1. احتمال وقوع 3 زلازل في أحد السنين:

$$\lambda = 2$$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-2}2^{3}}{3!} = 0.180$$

2. احتمال وقوع 5 زلازل خلال سنتين:

نلاحظ أن قيمة المتوسط (λ) تغيرت كالتالي:

1سنة ← زلزالين

2 سنة ← ؟

$$\lambda = \frac{2 * 2}{1} = 4$$

$$P(X = 5) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-4}4^{5}}{5!} = 0.156$$

3. المتوسط والتباين في الحالة 2.

$$E(X) = \mu = \sigma^{2} = \lambda = 4$$

مثال : اذا كان $X \sim P(\lambda = 2)$ فأوجد :

$-P(X = 4)$

$-P(X \geq 6)$

$-P(X < 1)$

الحل:

$$P(X = 4) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-2}2^{4}}{4!} = 0.09$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 6) &= 1 - P(X < 6) \\ &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)] \\ &= 1 - [0.135335 + 0.27067 + 0.27067 + 0.180447 + 0.09022 + 0.036089] \\ &= 0.0165 \end{aligned}$$

$$P(X < 1) = P(X = 0) = 0.1353$$

مثال : اذا كان معدل انقطاع الكهرباء عن مدينة طرابلس هو 3 مرات في كل 12 يوم , وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات انقطاع الكهرباء عن المدينة ، أوجد:

-1 احتمال عدم انقطاع الكهرباء خلال 6 أيام.

-2 احتمال انقطاع الكهرباء ما بين 4 و6 مرات خلال 6 يوم .

-3 احتمال انقطاع الكهرباء ما بين 7 و8 مرات خلال 6 يوم .

الحل:

.1 احتمال عدم انقطاع الكهرباء خلال6 أيام:

في هذه الحالة نجد قيمة المتوسط (λ) الجديدة:

12 يوم ← $\lambda = 3$

6 أيام ← $\lambda = ؟$

$$\lambda = \frac{3 * 6}{12} = 1.5$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-1.5}1.5^0}{0!} = 0.223$$

.2 احتمال انقطاع الكهرباء ما بين 4 و6 مرات خلال 6 يوم:

$$P(4 < X < 6) = P(X = 5) = \frac{e^{-1.5}1.5^5}{5!} = 0.0141$$

.3 احتمال انقطاع الكهرباء ما بين 7 و8 مرات خلال 6 يوم:

$$P(7 < X < 8) = 0$$

مثال : اذا كان معدل الحوادث التي يستقبلها قسم الحوادث هو أربعة حوادث في اليوم الواحد , فما احتمال :

-1 حدوث 2 حوادث أو أقل في يوم معين.

-2 ان يزيد عدد الحوادث عن 2 خلال يومين وأوجد التوقع والتباين في هذه الحالة.

الحل:

.1 حدوث 2 حوادث أو أقل في يوم معين:

$$\lambda = 4$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{e^{-4}4^0}{0!} + \frac{e^{-4}4^1}{1!} + \frac{e^{-4}4^2}{2!}$$

$$= 0.238$$

.2 ان يزيد عدد الحوادث عن 2 خلال يومين:

في هذه الحالة λ ستتغير كالتالي:

يوم واحد ← $\lambda = 4$

يومين ← $\lambda = ؟$

$$\lambda = \frac{2 \times 4}{1} = 8$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-8}8^0}{0!} + \frac{e^{-8}8^1}{1!} + \frac{e^{-8}8^2}{2!}\right] = 1 - 0.01375 = 0.9862$$

$$E(X) = V(X) = \lambda = 8$$

مثال : اذا كان متوسط عدد الأيام التي يقفل فيها مستوصف صحي أبوابه بسبب الصيانة هو 6 أيام في السنة فما هو احتمال ان المستوصف سيقفل أبوابه 6 أيام السنة القادمة بسبب الصيانة ؟

الحل:

$$\lambda = 6$$

$$P(X = 6) = \frac{e^{-6}6^6}{6!} = 0.16$$

مثال: اذا كان عدد السيارات المارة على الطريق الساحلي عند نقطة معينة يتبع توزيع بواسون بمعدل 5 سيارات كل دقيقة فأوجد احتمال:

1- مرور 7 سيارات خلال دقيقتين .

2- عدم مرور أي سيارة خلال دقيقتين.

3- مرور على الأقل 3 سيارات خلال 3 دقائق.

الحل:

1. مرور 7 سيارات خلال دقيقتين:

في هذهالحالة λ ستتغير:

دقيقة $\leftarrow (\lambda = 5)$

2 دقيقة $\leftarrow (\lambda = ؟)$

$$\lambda = \frac{2 \times 5}{1} = 10$$

$$P(X = 7) = \frac{e^{-10}10^7}{7!} = 0.09$$

2. عدم مرور أي سيارة خلال دقيقتين:

في هذه الحالة λ تأخذ نفس القيمة في الفقرة 1 وبالتالي:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-10}10^0}{0!} = 0.0000454$$

3. مرور على الأقل 3 سيارات خلال 3 دقائق:

في هذه الحالة λ ستتغير وتصبح:

دقيقة $\leftarrow \lambda = 5$

3 دقيقة $\leftarrow \lambda = ؟$

$$\lambda = \frac{3 \times 5}{1} = 15$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-15}15^0}{0!} + \frac{e^{-15}15^1}{1!} + \frac{e^{-15}15^2}{2!}\right] = 1 - 0.0000393 = 0.999$$

مثال: إذا كان المتغير العشوائي X له توزيع بواسون، حيث $P(X = 2) = 2P(X = 0)$ فأوجد:

1. $P(1 < X \leq 3)$.

2. $P(X \leq 1)$.

3. $P(X = 3)$.

4. إذا كانت $Y = 2X - 3$ فأوجد: $E(Y)$ ، $V(Y)$.

الحل: في البداية نقوم بإيجاد قيمة λ:

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x=0,1,2,\dots$$

$$P(X=2)=2P(X=0)\rightarrow\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}=2\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\rightarrow\frac{\lambda^2}{2}=2\rightarrow\lambda^2=4\rightarrow\lambda=2$$

1. $P(1<X\leq3)$:

$$P(1<X\leq3)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{e^{-2}2^2}{2!}+\frac{e^{-2}2^3}{3!}=0.4511$$

2. $P(X\leq1)$:

$$P(X\leq1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{e^{-2}2^0}{0!}+\frac{e^{-2}2^1}{1!}=0.406$$

3. $P(X=3)$:

$$P(X=3)=\frac{e^{-2}2^3}{3!}=0.18044$$

4. إذا كانت $Y=2X-3$ فأوجد: $E(Y)$ ، $V(Y)$:

$$E(Y)=E(2X-3)=2E(X)-3=2\lambda-3=1$$
$$V(Y)=V(2X-3)=4V(X)=4\lambda=8$$

<u>المتغير العشوائي المستمر (المتصل)</u>

المتغير العشوائي المتصل (المستمر) هو الذي تكون قيمه الممكنة غير قابلة للعد ويكون عبارة عن جميع القيم داخل فترة (a,b). (نتحصل على المتغيرات العشوائية المتصلة غالبا عن طريق القياس مثل الطول والوزن والزمن ودرجة الحرارة والضغط و............)

<u>دالة الكثافة الإحتمالية (دالة التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي المتصل)</u>

يجب أن تحقق الشرطين التاليين :

1) $f(x)\geq0 \quad \forall -\infty<x<\infty$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

المساحة تحت المنحنى تساوي 1 .

تحسب احتمالات المتغير العشوائي المتصل في صورة فترة , مثل : $P(a\leq X\leq b)$

احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي x قيمة ثابتة يساوي صفر , مثل : $P(X=a)=0$

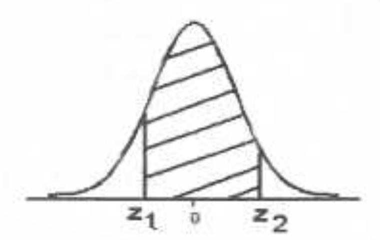
<u>التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتصل:</u>

$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$$
$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$
$$\sigma_X=\sqrt{V(X)}$$

مثال: المتغير العشوائي X يتوزع بدالّة احتمال:

$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$

- طريقة إيجاد $P(z_1 < Z < z_2)$:



وتعني مقدار المساحة الواقعة بين z_1 و z_2 ، ويمكن الحصول عليها كالتالي:

$$P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$$

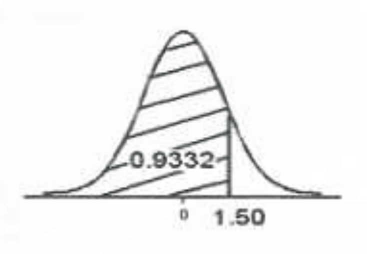
مثال: إذا كان $Z \sim N(0,1)$ فأوجد:

1. $P(Z < 1.50)$.
2. $P(Z < 0.98)$.
3. $P(Z > 0.98)$.
4. $P(-1.33 < Z < 2.42)$.

الحل:

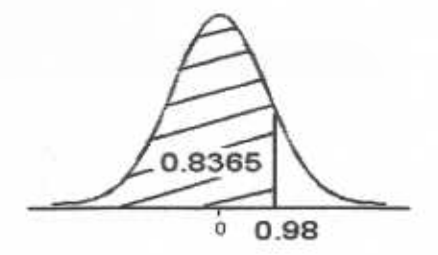
1. لاحظ أن علامة الاحتمال أصغر من ، أي أن المساحة المطلوبة يسار القيمة كما هو موضح بالرسم ، وبالتالي نستخدم الجدول مباشرة كما هو مبين ، وتكون $P(Z < 1.50) = 0.9332$.

z		0.00	...
⋮		⋮	
1.5	....	0.9332	
⋮			



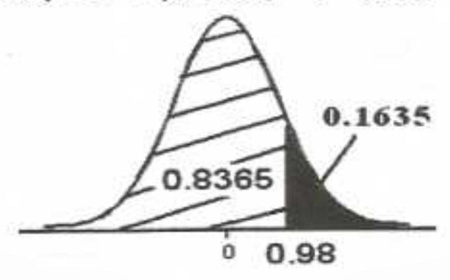
2. بمثل الفقرة السابقة، علامة الاحتمال أصغر من ، أي أن المساحة المطلوبة يسار القيمة كما هو موضح بالرسم ، وبالتالي نستخدم الجدول مباشرة كما هو موضح ، وتكون $P(Z < 0.98) = 0.8365$.

z	...	0.08	...
⋮		⋮	
0.9	....	0.8365	
⋮			



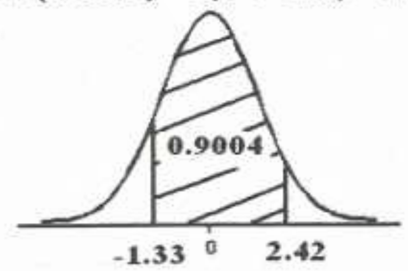
3. لاحظ أنا علامة الاحتمال اكبر من ، أي أن المساحة المطلوبة تكون على يمين القيمة ، والجدول يعطينا المساحات على يسار القيمة وبالتالي:

$$P(Z > 0.98) = 1 - P(Z < 0.98) = 1 - 0.8365 = 0.1635$$



4. نستطيع إيجادها كالتالي:

$$P(-1.33 < Z < 2.42) = P(Z < 2.42) - P(Z < -1.33) = 0.9922 - 0.0918 = 0.9004$$



مثال:أوجد الأتي:

1. $P(Z < 1)$
2. $P(Z < 1.15)$
3. $P(Z < -1.05)$
4. $P(Z < -2.55)$

الحل:

1. لاحظ أن علامة الاحتمال في كل الأمثلة في الأعلى هي أصغر من أي أن المساحات المطلوبة يسار القيم، وهو ما يتيح لنا استخدام الجدول مباشرة ، لاحظ أن العدد 1 موجب وبالتالي نتجه إلى جدول Z الموجب، نختار من العمود الأول من اليسار الرقم 1 ، ونختار من الصف الأول في الأعلى الرقم 0.00 وعند نقطة تقاطعهما تكون قيمة الاحتمال المطلوب أي يساوي *0.8413* .

Z	0.00	0.01	0.02 ....
0.0	0.500		
0.1	0.5398		
⋮	⋮		
1.0	0.8413		

2. نختار من العمود الأول من اليسار الرقم 1.1 ومن الصف الأول في الأعلى الرقم 0.05 وتكون بذلك تحصلنا على العدد 1.15 وعند نقطة تقاطعهما تكون قيمة الاحتمال المطلوب وتساوي 0.8749 .

Z	0.00	0.01	....	0.05
0.0	0.500			
0.1	0.5398			
⋮	⋮			⋮
1.1	0.8643		....	0.8749

3. لاحظ أن العدد سالب وبالتالي نذهب إلى جدول القيم السالبة وبنفس الطريقة السابقة نختار من العمود الأيسر الرقم 1.0- ونختار من الصف الأول في الأعلى العدد 0.05 وبذلك يكون العدد 1.05- ، وعند نقطة التقاطع تكون قيمة الاحتمال وتساوي 0.1469 .

Z	0.00	0.01		0.05
-3.4				
-3.3				⋮
⋮				
-1.0			....	0.1469

4. ويمثل الفقرات السابقة نجد أن قيمة الاحتمال تساوي 0.0054 .

مثال: أعد المثال السابق في حالة أن قيمة الاحتمال أكبر من كالتالي:

1. $P(Z > 1)$
2. $P(Z > 1.15)$
3. $P(Z > -1.05)$
4. $P(Z > -2.55)$

الحل: من خلال معرفتنا أن جدول Z القياسي يعطينا المساحات التي على يسار القيمة وبالتالي حتى نستطيع استخدام الجدول في أخر الكتاب يجب أن تكون علامة الاحتمال أصغر من ومن خلال معرفتنا أن كل المساحة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي تساوي واحد وبالتالي:

1. $P(Z > 1)$:

$$P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

2. بمثل الفقرة السابقة :

$$P(Z > 1.15) = 1 - P(Z < 1.15) = 0.1251$$

3. بنفس الطريقة :

$$P(Z > -1.05) = 1 - P(Z < -1.05) = 0.8531$$

4. مثل ما سبق ، نجد أنها تساوي 0.9946

مثال: أوجد المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي القياسي التي تقع:

1) بين $Z = 0$ و $Z = 0.87$.

2) على يمين $Z = 0.48$.

3) على يسار $Z = 0.79$.

4) على يسار $Z = -3.49$.

الحل:

1) من خلال جدول التوزيع الطبيعى المعياري نجد أن المساحة بين $Z = 0$ و $Z = 0.87$ تساوي المساحة على يسار القيمة 0.87 مطروحا منها المساحة يسار القيمة صفر أي تساوي :

$$0.8087 - 0.5 = 0.3078$$

2) نلاحظ أن جدول التوزيع الطبيعي القياسي يعطينا المساحات التي على يسار القيم وبالتالي المساحة على يمين $Z = 0.48$ تساوي:

$$1 - 0.6844 = 0.3156$$

3) من خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري مباشرة نجد أن المساحة تساوي 0.7852

4) من خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري مباشرة نجد أن المساحة تساوي 0.0002

مثال : اذا كان المتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي القياسي $Z \sim N(0,1)$ فاحسب:

$P(Z = 1.9)$

$P(Z < -0.54)$

$P(Z \geq 0.29)$

$P(Z < 0)$

$P(Z < -2)$

$P(Z \leq -3.01)$

$P(Z = 3.11)$

$P(1 < Z < 2.31)$

$P(-2.75 \leq Z \leq -0.15)$

$P(Z \leq 1.72)$

$P(Z > 1.07)$

$P(-1.91 \leq Z \leq 0.45)$

$P(Z < 0.5)$

$P(Z > 2)$

$P(Z > 4)$

$P(0 \leq Z \leq 1.25)$

$P(Z = 0)$

الحل:

$P(Z = 1.9) = 0$

$P(Z < -0.54) = 0.2946$

$P(Z \geq 0.29) = 1 - P(Z < 0.29) = 1 - 0.6141 = 0.3859$

$P(Z < 0) = 0.5$

$P(Z < -2) = 0.0228$

$P(Z \leq -3.01) = 0.0013$

$P(Z = 3.11) = 0$

$P(1 < Z < 2.31) = P(Z < 2.31) - P(Z < 1) = 0.9896 - 0.8413 = 0.1483$

$P(-2.75 \leq Z \leq -0.15) = P(Z < -0.15) - P(Z < -2.75) = 0.4404 - 0.0030 = 0.4374$

$P(Z \leq 1.72) = 0.9573$

$P(Z > 1.07) = 1 - P(Z < 1.07) = 1 - 0.8577 = 0.1423$

$P(-1.91 \leq Z \leq 0.45) = P(Z < 0.45) - P(Z < -1.91) = 0.6736 - 0.0281 = 0.6455$

$P(Z < 0.5) = 0.6915$

$P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

$P(Z > 4) = 0$

$P(0 \leq Z \leq 1.25) = P(Z < 1.25) - P(Z < 0) = 0.8944 - 0.5 = 0.3944$

$P(Z = 0) = 0$

مثال: للتوزيع الطبيعي المعياري $Z \sim N(0,1)$ أوجد قيمة K ، اذا كانت:

1) $P(Z \leq K) = 0.5$

2) $P(Z \geq K) = 0.2451$

3) $P(Z \leq K) = 0.8289$

4) $P(-K \leq Z \leq K) = 0.901$

5) $P(0 \leq Z \leq K) = 0.492$

6) $P(Z > K) = 0.0548$

7) $P(|Z| < K) = 0.901$

8) $P(|Z| > K) = 0.099$

9) $P(-1.24 < Z < K) = 0.8$

الحل:

1. $P(Z \leq K) = 0.5$:

نلاحظ هنا بخلاف المثال السابق، القيمة المعطاة هي قيمة المساحة تحت المنحنى بينما المجهول هو إيجاد القيمة على المحور الأفقي، وبما أن جدول Z متماثل حول الصفر والمساحة الكلية تساوي الواحد فهذا يعني أن المساحة يمين الصفر تساوي 0.5 ويسار الصفر تساوي 0.5 ، أي أن قيمة K تساوي صفر.

2. $P(Z \geq K) = 0.2451$

نلاحظ أن قيمة المساحة أصغر من 0.5، وعلامة الاحتمال أكبر من ، أي أن قيمة K ستكون موجبة :

$$P(Z \geq K) = 0.2451 \rightarrow 1 - P(Z < K) = 0.2451 \rightarrow P(Z < K) = 0.7549$$

ومن خلال الجدول نجد أنه عند المساحة 0.7549 قيمة K تساوي 0.69 .

3. $P(Z \leq K) = 0.8289$

نلاحظ أن قيمة المساحة أكبر من 0.5، وعلامة الاحتمال أصغر من ، أي أن قيمة K ستكون موجبة ومن خلال الجدول مباشرة نجد أن قيمة K عند المساحة 0.8289 تساوي 0.95 .

4. $P(-K \leq Z \leq K) = 0.901$

$$P(-K \leq Z \leq K) = P(-K < Z < 0) + P(0 < Z < K)$$

من خلال خاصية التماثل في جدول التوزيع الطبيعي المعياري، نجد أن:

$$P(-K < Z < 0) = P(0 < Z < K)$$

وبذلك يكون لكل منهما نصف المساحة أي أن :

$$P(0 \leq Z \leq K) = 0.4505$$

$$P(0 \leq Z \leq K) = P(Z \leq K) - P(Z \leq 0) = 0.4505$$

$$P(Z \leq K) = P(Z \leq 0) + 0.4505 = 0.5 + 0.4505 = 0.9505$$

من خلال جدول التوزيع وعند المساحة 0.9505 نجد أن K تساوي 1.65

5. $P(0 \leq Z \leq K) = 0.492$

بنفس الطريقة السابقة: $P(0 \leq Z \leq K) = P(Z \leq K) - P(Z \leq 0) = 0.492$

$$P(Z \leq K) = 0.492 + 0.5 = 0.992$$

من خلال الجدول ، نجد أن قيمة K تساوي 2.41 .

6. $P(Z > K) = 0.0548$

$$P(Z > K) = 1 - P(Z < K) = 0.0548 \rightarrow P(Z < K) = 1 - 0.0548 = 0.9452$$

من خلال الجدول نجد أن قيمة K تساوي 1.6 .

7. $P(|Z| < K) = 0.901$

لاحظ أن علامة الاحتمال أصغر من وبالتالي نستطيع تحويل القيمة المطلقة الى:

$$P(-K \le Z \le K) = 0.901$$

وكما في الفقرة 4 تكون قيمة K 1.65 .

8. $P(|Z| > K) = 0.099$: لاحظ أن علامة الاحتمال أكبر من أي عكس الفقرة السابقة ويتم التعامل معها كالتالي:

$$P(|Z| > K) = P(Z > K) + P(Z < -K) = 1 - P(-K \le Z \le K) = 0.099$$
$$\rightarrow P(-K \le Z \le K) = 1 - 0.099 = 0.901$$

ومن خلال الفقرة السابقة تكون قيمة K تساوي 1.65

9. $P(-1.24 < Z < K) = 0.8$:

$$P(Z < K) - P(Z < -1.24) = 0.8 \rightarrow P(Z < K) = 0.8 + 0.1075 = 0.9075$$

ومن خلال الجدول وعند المساحة 0.9075 نجد أن قيمة K تساوي تقريبا 1.325 .

<u>التحويل من التوزيع الطبيعي الى القياسي:</u> التحويل من $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ الى $Z \sim N(0,1)$:

جميع القيم غير القياسية (أي تتبع أي توزيع طبيعي متوسطه μ لا يساوي صفر وانحراف معياري σ لا يساوي 1) يمكن تحويلها إلى قيم قياسيه بإستخدام العلاقة:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

<u>ملاحظة:</u> لا يمكن استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي حتى يتم تحويل القيم الغير قياسية إلى قيم قياسية بالعلاقة السابقة.

مثال: اذا كان $X \sim N(3,16)$ أوجد :

1. $P(4 \le X \le 8)$.
2. $P(-2 \le X \le 1)$.
3. $P(0 \le X \le 5)$.

الحل:

1. $P(4 \le X \le 8)$:

لاحظ أن $\mu = 3\ ,\ \sigma^2 = 16\ ,\ \sigma = 4$ ، نستخدم علاقة التحويل الى التوزيع الطبيعي القياسي:

$$P(4 \le X \le 8) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \le Z \le \frac{X - \mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{4 - 3}{4} \le Z \le \frac{8 - 3}{4}\right) = P(0.25 \le Z \le 1.25)$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي تساوي 0.2957

2. $P(-2 \le X \le 1)$:

$$P(-2 \le X \le 1) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \le Z \le \frac{X - \mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{-2 - 3}{4} \le Z \le \frac{1 - 3}{4}\right) = P(-1.25 \le Z \le -0.5)$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي تساوي 0.2029

3. $P(0 \le X \le 5)$:

$$P(0 \le X \le 5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{0-3}{4} \le Z \le \frac{5-3}{4}\right) = P(-0.75 \le Z \le 0.5)$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي تساوي 0.4649

مثال: اذا كان $X \sim N(6,25)$ أوجد :

1. $P(0 \le X \le 8)$.
2. $P(4 \le X \le 10)$.
3. $P(X > 9.5)$.
4. $P(|X-6| \le 5)$.

الحل:

لاحظ أن $\mu = 6\ ,\ \sigma^2 = 25\ ,\ \sigma = 5$

1. $P(0 \le X \le 8)$:

$$P(0 \le X \le 8) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{0-6}{5} \le Z \le \frac{8-6}{5}\right) = P(-1.2 \le Z \le 0.4)$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي تساوي 0.5403 .

2. $P(4 \le X \le 10)$:

$$P(4 \le X \le 10) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{4-6}{5} \le Z \le \frac{10-6}{5}\right) = P(-0.4 \le Z \le 0.8)$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي تساوي 0.4435 .

3. $P(X > 9.5)$:

$$P(X > 9.5) = (Z > \frac{X-\mu}{\sigma})$$
$$= P\left(Z > \frac{9.5-6}{5}\right) = P(Z > 0.7)$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي تساوي 0.242

4. $P(|X-6| \le 5)$:

$$P(-5 \le X-6 \le 5) = P(1 \le X \le 11)$$
$$= P\left(\frac{1-6}{5} \le Z \le \frac{11-6}{5}\right) = P(-1 \le Z \le 1)$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي تساوي 0.6826

مثال:

اذا كان المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 1 وتباين يساوي 4 أوجد كلا من :

1. $P(3 < X < 5)$.
2. $P(|X| \leq 2)$.
3. $P(|X| > 2)$.
4. أوجد قيمة a إذا كانت $P(|X - \mu| \leq a) = 0.9556$

الحل:

$$\mu = 1 \ , \ \sigma^2 = 4 \ , \ \sigma = 2$$

1. $P(3 < X < 5)$:

$$P(3 < X < 5) = P\left(\frac{3-1}{2} < Z < \frac{5-1}{2}\right) = P(1 \leq Z \leq 2)$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي تساوي 0.1359

2. $P(|X| \leq 2)$:

$$P(|X| \leq 2) = P(-2 \leq X \leq 2)$$
$$= P\left(\frac{-2-1}{2} \leq Z \leq \frac{2-1}{2}\right) = P(-1.5 \leq Z \leq 0.5) = 0.6247$$

3. $P(|X| > 2)$:

$$P(|X| > 2) = 1 - [P(-2 \leq X \leq 2)] = P(X > 2) + P(X < -2)$$
$$= P(Z > \frac{2-1}{2}) + P(Z < \frac{-2-1}{2})$$
$$= P(Z > 0.5) + P(Z < -1.5) = 0.3085 + 0.0668 = 0.3753$$

4. أوجد قيمة a إذا كانت $P(|X - \mu| \leq a) = 0.9556$

$$P(|X - \mu| \leq a) = P(-a \leq X - \mu \leq a) = P(-a + \mu \leq X \leq a + \mu)$$
$$= P\left(\frac{-a+\mu-\mu}{2} \leq Z \leq \frac{a+\mu-\mu}{2}\right) = P(-0.5a \leq Z \leq 0.5a) = 0.9556$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن $0.5a = 2.01$ ويؤدي ذلك إلى أنّ a تساوي 4.02 .

مثال: اذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 18 وانحراف معياري 5 أوجد قيمة K بحيث يكون :

1. $P(X < K) = 0.2578$.
2. $P(X > K) = 0.2578$

الحل:

$$\mu = 18 \ , \ \sigma = 5$$

1. $P(X < K) = 0.2578$:

$$P(X < K) = 0.2578 \rightarrow P(Z < \frac{K-\mu}{\sigma}) = P\left(Z < \frac{K-18}{5}\right) = 0.2578$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أنه عند المساحة 0.2578 يكون:

$$\frac{K-18}{5} = -0.65 \rightarrow K = 14.75$$

2. $P(X > K) = 0.2578$:

$$P\left(Z > \frac{K-18}{5}\right) = 0.2578$$
$$P\left(Z > \frac{K-18}{5}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{K-18}{5}\right) = 0.2578$$

$$P\left(Z<\frac{K-18}{5}\right)=1-0.2578=0.7422$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أنه عند المساحة 0.7422 يكون:

$$\frac{K-18}{5}=0.65 \rightarrow K=21.25$$

مثال: اذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 10 وانحراف معياري 2 ، أوجد قيمة a بحيث يكون:

1. $P(X>a)=0.5$
2. $P(X>a)=0.95$
3. $P(a<X<10)=0.4332$
4. $P(-a<X-10<a)=0.95$

الحل: $\mu=10 \quad , \ \sigma=2$

1. $P(X>a)=0.5$:

$$P(X>a)=P(Z>\frac{a-\mu}{\sigma})=P\left(Z>\frac{a-10}{2}\right)=1-P\left(Z<\frac{a-10}{2}\right)=0.5$$

$$P\left(Z<\frac{a-10}{2}\right)=0.5$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أنه عند المساحة 0.5 تكون قيمة $\frac{a-10}{2}$ تساوي 0 ،أي أن:

$$\frac{a-10}{2}=0 \ \rightarrow a=10$$

2. $P(X>a)=0.95$:

$$P(X>a)=P(Z>\frac{a-\mu}{\sigma})=P\left(Z>\frac{a-10}{2}\right)=1-P\left(Z<\frac{a-10}{2}\right)=0.95$$

$$P\left(Z<\frac{a-10}{2}\right)=0.05$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أنه عند المساحة 0.05 تكون قيمة $\frac{a-10}{2}$ تساوي 1.645 - ،أي أن:

$$\frac{a-10}{2}=-1.645 \ \rightarrow a=6.71$$

3. $P(a<X<10)=0.4332$:

$$P(a<X<10)=P(\frac{a-10}{2}<Z<\frac{10-10}{2})$$

$$=P\left(\frac{a-10}{2}<Z<0\right)=P(Z<0)-P(Z<\frac{a-10}{2})=0.4332$$

$$\rightarrow P\left(Z<\frac{a-10}{2}\right)=0.5-0.4332=0.0668$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أنه عند المساحة 0.0668 تكون قيمة $\frac{a-10}{2}$ تساوي 1.5- ،أي أن:

$$\frac{a-10}{2}=-1.5 \ \rightarrow a=7$$

4. $P(-a<X-10<a)=0.95$:

$$P(-a < X - 10 < a) = P(\frac{-a + 10 - 10}{2} < Z < \frac{a + 10 - 10}{2})$$
$$= P\left(\frac{-a}{2} < Z < \frac{a}{2}\right)$$

ومن خلال التماثل ، المساحة التي أكبر من $\frac{a}{2}$ تساوي المساحة التي أصغر من $\frac{-a}{2}$ اي أن:

$$P\left(\frac{-a}{2} < Z < \frac{a}{2}\right) = 1 - 2P\left(Z < \frac{-a}{2}\right) = 0.95$$
$$\rightarrow P\left(Z < \frac{-a}{2}\right) = \frac{1 - 0.95}{2} = 0.025$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أنه عند المساحة 0.025 تكون قيمة $\frac{-a}{2}$ تساوي 1.96- ،أي أن:

$$\frac{-a}{2} = -1.96 \rightarrow a = 3.92$$

مثال: إذا كانت درجة الحرارة خلال فترة من العام في بلد ما تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 20 وانحراف معياري 3 .
أوجد الإحتمالات التاليه :

1. أن لا تزيد درجة الحرارة عن 23^o .
2. أن تكون درجة الحرارة بين 26^o و 15^o .

الحل:

$$\mu = 20 \quad , \quad \sigma = 3$$

1. أن لا تزيد درجة الحرارة عن 23^o .

$$P(X < 23) = P(Z < \frac{X - \mu}{\sigma}) = \left(Z < \frac{23 - 20}{3}\right) = P(Z < 1) = 0.8413$$

2. أن تكون درجة الحرارة بين 26^o و 15^o:

$$P(15 < X < 26) = P\left(\frac{15 - 20}{3} < Z < \frac{26 - 20}{3}\right) = P(-1.67 < Z < 2) = 0.9297$$

مثال: إذا كان معروفا أن درجات الذكاء لأفراد أحد المجتمعات تتوزع توزيعا طبيعيا متوسطه 110 درجة وانحرافه المعياري 5 درجات فأوجد النسبة المئوية لأفراد هذا المجتع الذين تقع درجة ذكائهم بين 110 و 120 .

الحل:

$$\mu = 110 \quad , \quad \sigma = 5$$
$$P(110 < X < 120) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < Z < \frac{X - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{110 - 110}{5} < Z < \frac{120 - 110}{5}\right)$$
$$= P(0 < Z < 2) = 0.4772 = 47.72\%$$

مثال : فترة الحمل التامة في النساء تعتبر متغير عشوائي بمتوسط 266 يوم وانحراف معياري 12 يوم. ماهي نسبة السيدات اللاتي يستمر حملهن بين 260 و 270 يوم.

الحل:

$$\mu = 266 \quad , \quad \sigma = 12$$
$$P(260 < X < 270) = P\left(\frac{260 - 266}{12} < Z < \frac{270 - 266}{12}\right)$$
$$= P(-0.5 < Z < 0.33) = 0.3208 = 32.08\%$$

مثال : إذا كان عدد الطلبة المتقدمين للالتحاق بإحدى الكليات العسكرية 2000 طالب وكانت أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 170 سم و انحراف معياري 10 سم.

1) ما نسبة الطلبة المتقدمين الذين أطوالهم أكبر من 150 سم.
2) إذا كانت الكلية تقبل الطلاب الذين تتراوح أطوالهم بين 150 و 185 سم. فما هو عدد الطلبة المحتمل قبولهم.

الحل: $\mu = 170 \ , \ \sigma = 10$

1. نسبة الطلبة المتقدمين الذين أطوالهم أكبر من 150 سم:

$$P(X > 150) = P\left(Z > \frac{150-170}{10}\right) = P(Z > -2) = 0.9772 = 97.72\%$$

2. إذا كانت الكلية تقبل الطلاب الذين تتراوح أطوالهم بين 150 و 185 سم. فإن عدد الطلبة المحتمل قبولهم:

$$P(150 < X < 185) = P\left(\frac{150-170}{10} < Z < \frac{185-170}{10}\right)$$
$$= P(-2 < Z < 1.5) = 0.9104$$

أي أن عدد الطلبة المحتمل قبولهم يساوي $[2000 \times 0.9104 \approx$ 1821 طالبا$]$

مثال: لنفرض أن مستوى هيموجلوبين الدم في أحد المجتمعات البشرية يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 16 ، فإذا كانت نسبة الأشخاص الذين مستوى هيموجلوبين الدم لديهم أكبر من 14 هي 98.68% ، فأوجد قيمة σ ، ثم أوجد نسبة الأشخاص الذين يتراوح مستوى هيموجلوبين الدم لديهم من 14 إلى 18.

الحل: $\mu = 16$ من خلال المعطيات يتضح أن $P(X > 14) = 0.9868$ وبالتالي:

$$P(X > 14) = P(Z > \frac{X-\mu}{\sigma}) = P(Z > \frac{14-16}{\sigma})$$
$$= 1 - P\left(Z < \frac{14-16}{\sigma}\right) = 0.9868 \rightarrow P\left(Z < \frac{14-16}{\sigma}\right) = 0.0132$$

ومن خلال جدول Z وعند قيمة المساحة 0.0132 نجد أن :

$$\frac{14-16}{\sigma} = -2.22 \rightarrow \sigma = 0.9$$

$$P(14 < X < 18) = P(\frac{14-16}{0.9} < Z < \frac{18-16}{0.9}) = P(-2.22 < Z < 2.22)$$
$$= P(Z < 2.22) - P(Z < -2.22) = 0.9868 - 0.0132 = 0.9736$$

وعليه فإن نسبة الأشخاص الذين يتراوح مستوى هيموجلوبين الدم لديهم من 14 إلى 18 هي 97.36%.

مثال: إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري يساوي 28 ، فاوجد قيمة μ بحيث $P(X > 200) = 0.0367$.

الحل: $\sigma = 28$

$$P(X > 200) = P(Z > \frac{X-\mu}{\sigma}) = P(Z > \frac{200-\mu}{28})$$
$$= 1 - P\left(Z < \frac{200-\mu}{28}\right) = 0.0367 \rightarrow P\left(Z < \frac{200-\mu}{28}\right) = 0.9633$$

ومن خلال جدول توزيع Z عند قيمة المساحة 0.9633 نجد أن :

$$\frac{200-\mu}{28} = 1.79 \rightarrow \mu = 149.88$$

توزيع t

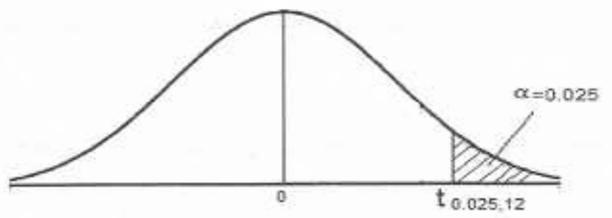
- المساحة تحت المنحنى تساوي 1 .
- التوزيع متماثل حول الصفر .
- القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي T تساوي صفر $E(T)=0$
- صيغة الاحتمال $P(T \geq t_{\alpha,n}) = \alpha$

مثال : باستخدام جدول توزيع t أوجد :

$t_{0.025,12}$ ، $t_{0.05,3}$ ، $t_{0.99,11}$ ، $t_{0.995,9}$ ، $t_{0.90,16}$

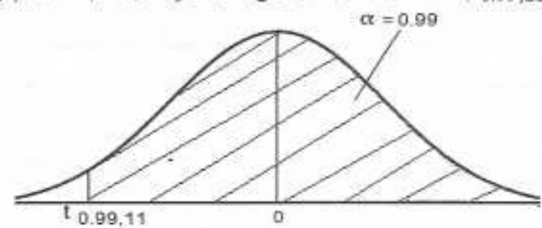
الحل:

- $t_{0.025,12}$ وتعني القيمة $(t_{0.025,12})$ التي يقع يمينها مساحة قدرها 0.025 ودرجة الحرية تساوي 12 كما هي موضحة بالرسم،



أي أن القيمة ستكون موجبة ومن خلال الجدول نستطيع إيجادها مباشرة بحيث نختار من العمود الأيسر (عمود درجات الحرية n) القيمة 12 ، ونختار من الصف الأول (صف المساحات α) القيمة 0.025 وعند نقطة تقاطع العمود مع الصف نحصل على القيمة $t_{0.025,12}$ ونجدها تساوي 2.179 .

- $t_{0.05,3}$ بمثل الفقرة السابقة من خلال نقطة تقاطع المساحة $(\alpha = 0.05)$مع درجة الحرية $(n = 3)$ نجدها تساوي 2.353 .
- $t_{0.99,11}$ وتعني القيمة $t_{0.99,11}$ التي على يمينها مساحة مقدارها 0.99 ودرجة حريتها 11 كما هي موضحة بالرسم، ولإيجاد القيمة ($t_{0.99,11}$) نلاحظ أن جدول التوزيع لا يحتوي على القيم السالبة (أي المساحات التي أكبر



من 0.5) ، لذلك نستعمل خاصية تماثل جدول التوزيع حول الصفر أي:

$$t_{\alpha,n} = -t_{1-\alpha,n}$$

$$t_{0.99,11} = -t_{0.01,11} = -2.718$$

- $t_{0.995,9}$ بمثل الفقرة السابقة ومن خلال خاصية التماثل نجد أن :

$$t_{0.995,9} = -t_{0.005,9} = -3.250$$

- المطلوب الأخير $t_{0.90,16}$:

بمثل الفقرتين السابقتين نجد أن القيمة تساوي -1.337

مثال : من جدول t وبدرجة حرية 20 ، أوجد:

1. $P(T > 1.325)$
2. $P(T \leq 1.325)$
3. $P(1.325 < T < 2.528)$
4. $P(-1.725 < T < 1.325)$
5. أوجد a إذا كان $P(T \geq a) = 0.050$ حيث $n = 23$
6. أوجد a إذا كان $P(T < a) = 0.050$ حيث $n = 23$

الحل:

1. $P(T > 1.325)$:

نلاحظ أن جدول t يعطينا المساحات التي على يمين القيم (أي أن علامة الاحتمال تكون أكبر من) وبالتالي نستطيع استخدام الجدول مباشرة ، عند صف درجة الحرية 20 نختار القيمة 1.325 فنجد أن قيمة المساحة (α) في أعلى العمود تساوي 0.1 .

2. $P(T \leq 1.325)$:

نلاحظ أن جدول التوزيع يُعطي المساحات التي علي يمين القيم وليس على يسار القيم ، ونعلم أن المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي الواحد وبالتالي:

$$P(T \leq 1.325) = 1 - P(T > 1.325) = 1 - 0.1 = 0.9$$

3. $P(1.325 < T < 2.528)$:

لاحظ أن المساحة التي أكبر من 1.325 تساوي مباشرة من الجدول 0.1 والمساحة التي أكبر من 2.528 تساوي 0.01 وبالتالي فإن المساحة المحصورة بين 1.325 و 2.528 تساوي:

$$P(1.325 < T < 2.528) = [P(T > 1.325) - P(T > 2.528] = 0.1 - 0.01 = 0.09$$

4. $P(-1.725 < T < 1.325)$:

المساحة المطلوبة تساوي:

$$P(-1.725 < T < 1.325) = 1 - [P(T < -1.725) + P(T > 1.325)]$$

من خلال التماثل، لاحظ أن المساحة التي أصغر من 1.725- تساوي المساحة التي أكبر من 1.725 ، ولاحظ أيضا أن المساحة التي أكبر من 1.325 تساوي من خلال الجدول مباشرة 0.1 ونعلم أن المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي 1 وبالتالي:

$$P(-1.725 < T < 1.325) = 1 - [P(T > 1.725) + P(T > 1.325)] = 1 - [0.05 + 0.1] = 0.85$$

5. أوجد a إذا كان $P(T \geq a) = 0.050$ حيث $n = 23$:

لا حظ أن قيمة المساحة (α) تساوي 0.050 و درجة الحرية n تساوي 23 ، ولاحظ أن علامة الاحتمال أكبر من، أي أننا من خلال الجدول مباشرة و عند تقاطع α مع n نجد أن: $a = 1.714$

6. أوجد a إذا كان $P(T < a) = 0.050$ حيث $n = 23$:

هنا عكس الفقرة السابقة حيث، المساحة (α) التي يسار القيمة a تساوي 0.05 ، أي أن القيمة a ستكون سالبة(لأن قيمة المساحة أصغر من النصف) وحتى نستطيع استخدام الجدول يجب أن تكون علامة الاحتمال اكبر من وبالتالي:

$$P(T < a) = 1 - P(T > a) = 0.05 \to P(T > a) = 0.95$$

ومن خلال خاصية التماثل: $t_{\alpha,n} = -t_{1-\alpha,n}$

$$t_{0.95,23} = -t_{0.05,23} = -1.714$$

أي أن قيمة a تساوي 1.714-.

مثال : من جدول توزيع t أوجد:

1. $P(-2.447 \leq T \leq 2.447)$ عندما $n = 6$
2. الثابت A حيث $P(|T| < A) = 0.95$ عندما $n=15$
3. أوجد قيمة k بحيث: $P(K \leq T \leq -1.761) = 0.045$ عندما $n=14$

الحل:

1. في هذه الحالة ومن خلال الجدول نجد أنه عند درجة الحرية 6 عند القيمة 2.447 تكون المساحة التي على يمينها (α) تساوي 0.025 وهي نفس المساحة التي يسار القيمة 2.447− (بالتماثل)، أي أن المساحة المطلوبة تساوي :

$$P(-2.447 \leq T \leq 2.447) = 1 - (0.025 + 0.025) = 0.95$$

2. هنا يتم التعامل مع القيمة المطلقة كالتالي:

$$P(|T| < A) = P(-A < T < A) = 0.95$$

لاحظ أن المساحة على يمين A تساوي المساحة على يسار A- وكليهما متساويان ويساويان معا $(1 - 0.95 = 0.05)$ أي أن المساحة المتبقية يمين القيمة A هي $\left(\frac{1-0.95}{2}\right)$ وتساوي 0.025 ، وبذلك يكون $P(T > A) = 0.025$ ، وبالتالي عند نقطة تقاطع المساحة على يمين القيمة A $(\alpha = 0.025)$ مع درجة الحرية $(n = 15)$ نجد أن $A = 2.131$.

3. لاحظ أن:

$$P(K \leq T \leq -1.761) = P(T \geq K) - P(T \geq -1.761) = 0.045$$

حيث: $P(T \geq -1.761) = 1 - P(T < -1.761)$

ومن خلال خاصية التماثل، المساحة يسار القيمة 1.761- تساوي المساحة يمين القيمة 1.761 ، أي أن :

$$P(T \leq -1.761) = P(T \geq 1.761) = 0.05$$

وعليه فإن: $P(T \geq -1.761) = 1 - 0.05 = 0.95$

وبالتالي:

$$P(T \geq K) = P(T \geq -1.761) + 0.045 = 0.95 + 0.045 = 0.995$$

$$P(T \geq K) = 0.995$$

وبما أن جدول t يعطينا القيمة التي على يمينها مساحة أقل من النصف ، وبالتالي:

$$K = t_{\alpha,n} = -t_{1-\alpha,n} \rightarrow K = t_{0.995,14} = -t_{0.005,14} = -2.977$$

مثال : من جدول t أوجد :

1. $P(1.372 \leq T \leq 2.764)$ عندما $n=10$
2. $P(-1.717 \leq T \leq 2.508)$ عندما $n=22$

الحل:

1. $P(1.372 \leq T \leq 2.764) = P(T \geq 1.372) - P(T \geq 2.764) = 0.1 - 0.01 = 0.09$

أو بطريقة أخرى:

من خلال الجدول نجد أن المساحة التي يمين القيمة 2.764 تساوي 0.01 بينما المساحة التي يمين القيمة 1.372 تساوي 0.1 (وهذا يعني أن المساحة يسار القيمة 1.372 تساوي 0.9) أي أن المساحة المطلوبة تكون كالتالي:

$$P(1.372 \leq T \leq 2.764) = 1 - (0.01 + 0.9) = 0.09$$

2. من خلال الجدول نجد أن المساحة التي يمين القيمة 2.508 تساوي 0.01 بينما المساحة يمين القيمة 1.717 تساوي 0.05 (وهذا يعني أن المساحة يسار القيمة 1.717- تساوي 0.05) أي أن المساحة المطلوبة تساوي:

$$P(-1.717 \le T \le 2.508) = 1 - (0.01 + 0.05) = 0.94$$

مثال: من جدول t وبدرجة حرية 16 أوجد قيمة a بحيث:

1. $P(T > a) = 0.95$
2. $P(T< a) = 0.95$
3. $P(T> a) = 0.025$

الحل:

1. من خلال قيمة المساحة (0.95) وعلامة الاحتمال أكبر من ندرك أن قيمة a ستكون سالبة ، حيث:

$$a = t_{\alpha,n} = -t_{1-\alpha,n}$$

$$a = t_{0.95,16} = -t_{0.05,16} = -1.746$$

2. من خلال قيمة المساحة وعلامة الاحتمال أصغر من ندرك أن قيمة a ستكون موجبة وبذلك يكون:

$$P(T < a) = 0.95 = 1 - P(T > a) \rightarrow P(T > a) = 1 - 0.95 = 0.05$$

ومن خلال جدول التوزيع وعند القيمة $\alpha = 0.05$ ودرجة الحرية 16 نجد أن $a = 1.746$

3. من خلال الجدول مباشرة عند تلاقي القيمتين $(\alpha = 0.025\ ,\ n = 16)$ نجد أن قيمة $a = 2.120$

مثال: من جدول t وبدرجة حرية 16 أوجد:

1. $P(|T| > 2.120)$
2. $P(|T| < 2.120)$

الحل:

1. $P(|T| > 2.120)$:

$$P(|T| > 2.120(= P(T > 2.120) + P(T < -2.120) = 2P(T > 2.120) = 2(0.025) = 0.05$$

2. $P(|T| < 2.120)$:

$$P(|T| < 2.120) = 1 - [P(T > 2.120) + P(T < -2.120)] = 1 - 2P(T > 2.120) = 0.95$$

توزيعات المعاينة

1. **توزيع متوسط العينة:**

- إذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم (وكان مجتمع المعاينة له توزيع طبيعي أو غير طبيعي بشرط حجم العينة كبير)فإن:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهول وكان حجم العينة كبير فإن:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

- إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهول وكان حجم العينة صغير (وكان مجتمع المعاينة له توزيع طبيعي)فإن:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

حيث: $\overline{X}$ متوسط العينة ، μ متوسط للمجتمع، σ الانحراف المعياري للمجتمع ، S الانحراف المعياري للعينة ، n حجم العينة.

ملاحظة: (عندما نقول أن حجم العينة كبير فإننا نعني أنها أكبر من 30 وعندما نقول أن حجم العينة صغير فإننا نعني أنها أصغر من 30).

مثال: إذا كان $X \sim N(9,4)$ ، لعينة حجمها 25 من مجتمع طبيعي، احسب احتمال أن متوسط العينة يزيد عن 10 .

الحل: σ^2 معلومة:

$$\sigma^2 = 4 \quad , \quad \mu = 9 \quad , \quad n = 25$$

$$P(\overline{X} > 10) = P(Z > \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z > \frac{10 - 9}{\frac{2}{\sqrt{25}}})$$

$$= P(Z > 2.5) = 0.0062$$

مثال: إذا كان $X \sim N(7, \sigma^2)$ ، لعينة عشوائية حجمها 36 من مجتمع X وتباينها 9، احسب احتمال أن يقل متوسط العينة عن 8 .

الحل:

σ^2 مجهولة ، $n > 30$:

$$S^2 = 9 \quad , \quad \mu = 7 \quad , \quad n = 36$$

$$P(\overline{X} < 8) = P(Z < \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}) = P(Z < \frac{8 - 7}{\frac{3}{\sqrt{36}}})$$

$$= P(Z < 2) = 0.9772$$

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها 9 أطفال من الأطفال حديثي الولادة في أحد المستشفيات، إذا علمت أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي متوسطه 2900 جرام وانحرافه المعياري 600 جرام. فأوجد:

- احتمال أن متوسط أوزان الأطفال في العينة يزيد عن 3100 جرام.
- احتمال أن متوسط أوزان الأطفال بالعينة بين 2700جرام و 3200 جرام.

الحل:

σ^2 معلومة:

$$\sigma = 600 \quad , \quad \mu = 2900 \quad , \quad n = 9$$

أ. احتمال أن متوسط أوزان الأطفال في العينة يزيد عن 3100 جرام:

$$P(\overline{X} > 3100) = P(Z > \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z > \frac{3100-2900}{\frac{600}{\sqrt{9}}}) = P(Z > 1) = 0.1587$$

ب. احتمال أن متوسط أوزان الأطفال بالعينة بين 2700جرام و 3200 جرام:

$$P(2700 < \overline{X} < 3200) = P(\frac{2700-2900}{\frac{600}{\sqrt{9}}} < Z < \frac{3200-2900}{\frac{600}{\sqrt{9}}})$$

$$= P(-1 < Z < 1.5) = 0.7745$$

مثال: إذا كانت درجات طلاب مادة الاحصاء الهندسي تتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط 70 درجة، أخذت عينة حجمها 9 طلاب فوجد أن الانحراف المعياري لدرجات الطلاب في العينة يساوي 11 درجة، ما احتمال أن يزيد متوسط درجاتهم عن 75 درجة.

الحل:

تباين المجتمع σ^2 مجهول و $n < 30$:

$$S = 11 \quad , \quad \mu = 70 \quad , \quad n = 9$$

$$P(\overline{X} > 75) = P(T > \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}) = P(T > \frac{75-70}{\frac{11}{\sqrt{9}}}) = P(T > 1.3636) \approx P(T > 1.397)$$

من جدول T عند درجة الحرية n-1 أي عند درجة حرية 8 وعند القيمة 1.397 نجد أن قيمة الاحتمال تساوي 0.1 .

2. توزيع الفرق بين متوسطي عينتين:

- إذا كان تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين(وكان كل مجتمع له توزيع طبيعي أو غير طبيعي بشرط حجم العينتين كبير) فإن:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- إذا كان تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وكان حجم العينتين كبير فإن:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

- إذا كان تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين ومتساويين وكان حجم العينتين صغير (وكل مجتمع له توزيع طبيعي)فإن:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

حيث: σ_1^2 ، σ_2^2 تباين المجتمعين الأول والثاني على التوالي ، S_1^2، S_2^2 تباين العينة الأولى والثانية على التوالي،

$\overline{X}_1$ متوسط العينة الأولى ، $\overline{X}_2$ متوسط العينة الثانية، μ_1 متوسط المجتمع الأول، μ_2 متوسط المجتمع الثاني، n_1 حجم عينة المجتمع الأول ، n_2 حجم عينة المجتمع الثاني.

يمكن الحصول على SP من خلال التباين المشترك SP^2 من القانون:

$$SP^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \quad , \quad SP = \sqrt{SP^2}$$

مثال: مصنعان لإنتاج المصابيح الكهربائية،متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الأول 1500 ساعة وانحرافه المعياري 200 ساعة، بينما متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الثاني 1200 ساعة وانحرافه المعياري 150 ساعة، سحبت عينة عشوائية حجمها 150 مصباحا من المصنع الأول وعينة عشوائية أخرى حجمها 125 مصباحا من إنتاج المصنع الثاني لاختبار هما فأوجد:

1. احتمال أن يزيد متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الأول عن متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الثاني.
2. احتمال أن يزيد متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الأول 250 ساعة على الأقل عن متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الثاني.

الحل:

تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2معلومين:

$$\mu_1 = 1500 \ , \sigma_1 = 200 \ , n_1 = 150 \ , \qquad \mu_2 = 1200, \sigma_2 = 150 \ , n_2 = 125$$

1. احتمال أن يزيد متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الأول عن متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الثاني:

$$P(\overline{X}_1 > \overline{X}_2) = P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 > 0) = P(Z > \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}})$$

$$= P(Z > \frac{0 - (1500 - 1200)}{\sqrt{\frac{200^2}{150} + \frac{150^2}{125}}}) = P(Z > -14.2) = 1$$

2. احتمال أن يزيد متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الأول 250 ساعة على الأقل عن متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الثاني:

$$P(\overline{X}_1 \geq \overline{X}_2 + 250) = P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geq 250) = P(Z > \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$P(Z \geq \frac{250 - (1500 - 1200)}{\sqrt{\frac{200^2}{150} + \frac{150^2}{125}}}) = P(Z \geq -2.37) = 0.9911$$

مثال:أخذت عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي $N_1(70,169)$ و $N_2(67,100)$ على التوالي فإذا كان حجم العينة الأولى 30 وحجم العينة الثانية 40 ، وكان $\overline{X}_1$ يرمز إلى متوسط العينة الأولى بينما $\overline{X}_2$ يرمز لمتوسط العينة الثانية فأوجد:

1. احتمال أن يزيد متوسط العينة الأولى عن متوسط العينة الثانية.
2. احتمال أن يزيد الفرق بين متوسطي العينتين عن 8 .

3. احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكبر من 8 وأقل من 10 .

4. $P(\bar{X}_1 - 69 < 0)$.

5. $P(\bar{X}_2 - 55 > 10)$.

6. $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 + 50 > 58)$

الحل:

تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين:

$$\mu_1 = 70 \;, \sigma_1^2 = 169 \;, n_1 = 30 \;, \qquad \mu_2 = 67 \;, \sigma_2^2 = 100 \;, n_2 = 40$$

1. احتمال أن يزيد متوسط العينة الأولى عن متوسط العينة الثانية:

$$P(\bar{X}_1 > \bar{X}_2) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0) = P(Z > \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}})$$

$$= P(Z > \frac{0 - (70 - 67)}{\sqrt{\frac{169}{30} + \frac{100}{40}}}) = P(Z > -1.05) = 0.8531$$

2. احتمال أن يزيد الفرق بين متوسطي العينتين عن 8 :

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 8) = P(Z > \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}})$$

$$= P(Z > \frac{8 - (70 - 67)}{\sqrt{\frac{169}{30} + \frac{100}{40}}}) = P(Z > 1.75) = 0.0401$$

3. احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكبر من 8 وأقل من 10:

$$P(8 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 10) = P(\frac{8 - (70 - 67)}{\sqrt{\frac{169}{30} + \frac{100}{40}}} < Z < \frac{10 - (70 - 67)}{\sqrt{\frac{169}{30} + \frac{100}{40}}})$$

$$= P(1.75 < Z < 2.45) = 0.033$$

4. $P(\bar{X}_1 - 69 < 0)$:

$$P(\bar{X}_1 - 69 < 0) = P(\bar{X}_1 < 69) = P(Z < \frac{\bar{X}_1 - \mu_1}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}}) = P(Z < \frac{69 - 70}{\frac{13}{\sqrt{30}}})$$

$$= P(Z < -0.42) = 0.3372$$

5. $P(\bar{X}_2 - 55 > 10)$:

$$P(\bar{X}_2 - 55 > 10) = P(\bar{X}_2 > 65) = P(Z > \frac{\bar{X}_2 - \mu_2}{\frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}}) = P(Z > \frac{65 - 67}{\frac{10}{\sqrt{40}}})$$

$$= P(Z > -1.26) = 0.8962$$

6. $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 + 50 > 58)$

$$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 + 50 > 58) = P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 > 58 - 50) = P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 > 8)$$

وهي نفس إجابة الفقرة رقم 2 .

مثال: معمل ينتج 700 كجم من المكرونة بشكل يومي سحبت منه عينة عشوائية تمثل حجم إنتاج 40 يوما فكان انحرافها المعياري 40 كجم ، ومعمل أخر ينتج 500 كجم كمعدل يومي سحبت منه عينة عشوائية تمثل حجم إنتاج 35 يوما فكان انحرافها المعياري 20 كجم ، فأوجد : $P(180 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 < 210)$.

الحل:

تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين كبير:

$$\mu_1 = 700 \quad ,S_1 = 40 \ ,n_1 = 40 \ , \qquad \mu_2 = 500 \quad ,S_2 = 20 \ ,n_2 = 35$$

$$P(180 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 < 210) = P\left(\frac{(180) - (700 - 500)}{\sqrt{\frac{40^2}{40} + \frac{20^2}{35}}} < Z < \frac{(210) - (700 - 500)}{\sqrt{\frac{40^2}{40} + \frac{20^2}{35}}}\right)$$

$$P(-2.79 < Z < 1.39) = 0.9151$$

مثال: سحبت عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $N(350, \sigma^2)$ فكان تباينها يساوي 7.8 ، وسحبت عينة عشوائية أخرى حجمها 12 من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $N(300, \sigma^2)$ فكان تباينها يساوي 6.5 ، أوجد احتمال أن الفرق بين متوسطي العينتين لا يزيد عن 53 .

الحل:

تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين ومتساويين وحجم العينتين صغير:

$$\mu_1 = 350 \quad ,S_1^2 = 7.8 \ ,n_1 = 10 \ , \qquad \mu_2 = 300 \quad ,S_2^2 = 6.5 \ ,n_2 = 12$$

$$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 < 53) = P\left(T < \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}\right)$$

$$SP^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(9 \times 7.8 + 11 \times 6.5)}{(10 + 12 - 2)} = 7.085$$

$$SP = \sqrt{SP^2} = \sqrt{7.085} = 2.6617$$

$$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 < 53) = P\left(T < \frac{(53) - (350 - 300)}{2.6617\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}}}\right) = P(T < 2.63) \approx 0.99$$

لاحظ أن القيمة 2.63 غير موجودة في جدول t لذلك نأخذ أقرب قيمة منها وهي 2.528 حيث $P(T > 2.63) \approx 0.01$.

3. توزيع نسبة العينة:

$$Z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1 - P)}{n}}}$$

حيث $\hat{P}$ نسبة العينة، P نسبة المجتمع، n حجم العينة.

ملاحظة: (في مسائل النسبة أو الفرق بين النسبتين نستخدم توزيع Z فقط).

مثال: إذا كانت نسبة الطلبة الراسبين في جامعة ما هي 9% ، أخذت عينة عشوائية مكونة من 1000 طالب ، فما هو احتمال أن نجد في هذه العينة 70 طالبا على الأكثر من الراسبين.

الحل: افرض أن $\hat{P}$ تمثل نسبة الطلبة الراسبين بالعينة ، $\hat{P}$ تتبع توزيع طبيعي متوسطه $P = 0.09$ وانحرافه المعياري:

$$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.09(1-0.09)}{1000}} = 0.00905$$

والمطلوب هو $P(\widehat{P} \le \left(\frac{70}{1000}\right)) = P(\widehat{P} \le (0.07))$

$$P(\widehat{P} \le 0.07) = P(Z \le \frac{\widehat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}) = P(Z \le \frac{0.07-0.09}{0.00905})$$

$$= P(Z \le -2.21) = 0.0136$$

مثال: إذا علم أن نسبة الأحدية المعيبة التي تنتجها إحدى الألات هي 3% فإذا اشترى أحد المعارض 400 حداء من إنتاج هذه الألة فما هو احتمال:

1. أن يجد 20 حداء على الأقل معيبا.
2. أن يجد 16 حداء على الأكثر معيبا.
3. أن يجد 380 حداء على الأقل جيدا.

الحل:

1. احتمال أن يجد 20 حداء على الأقل معيبا:

افرض أن $\widehat{P}$ تمثل نسبة الأحدية المعيبة بالعينة ، $\widehat{P}$ تتبع توزيع طبيعي متوسطه $P = 0.03$ وانحرافه المعياري:

$$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.03(1-0.03)}{400}} = 0.00853$$

والمطلوب هو $P(\widehat{P} \ge \left(\frac{20}{400}\right)) = P(\widehat{P} \ge (0.05))$

$$P(\widehat{P} \ge 0.05) = P(Z \ge \frac{\widehat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}) = P(Z \ge \frac{0.05-0.03}{0.00853})$$

$$= P(Z \ge 2.34) = 0.0096$$

2. احتمال أن يجد 16 حداء على الأكثر معيبا:

المطلوب هو $P(\widehat{P} \le \left(\frac{16}{400}\right)) = P(\widehat{P} \le (0.04))$

$$P(\widehat{P} \le 0.04) = P(Z \le \frac{\widehat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}) = P(Z \le \frac{0.04-0.03}{0.00853})$$

$$= P(Z \le 1.17) = 0.879$$

3. احتمال أن يجد 380 حداء على الأقل جيدا:

افرض أن $\widehat{P}$ تمثل نسبة الأحدية الجيدة بالعينة ، $\widehat{P}$ تتبع توزيع طبيعي متوسطه $P = 0.97$ وانحرافه المعياري:

$$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.97(1-0.97)}{400}} = 0.00853$$

والمطلوب هو $P(\widehat{P} \ge \left(\frac{380}{400}\right)) = P(\widehat{P} \ge (0.95))$

$$P(\hat{P} \geq 0.95) = P(Z \geq \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}) = P(Z \geq \frac{0.95 - 0.97}{0.00853})$$

$$= P(Z \geq -2.34) = 0.9904$$

مثال: إذا كانت نسبة المواليد الذكور في مجتمع ما هي 51% ، من عينة حجمها 200 حالة ولادة، ما هو احتمال أن نحصل على:

1. أقل من 45% ذكور.
2. ما بين 45% الى 60% إناث.

الحل:

1. أقل من 45% ذكور:

افرض أن $\hat{P}$ تمثل نسبة الذكور بالعينة ، $\hat{P}$ تتبع توزيع طبيعي متوسطه $P = 0.51$ وانحرافه المعياري:

$$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.51(1-0.51)}{200}} = 0.0353$$

والمطلوب هو $P(\hat{P} < 0.45)$

$$P(\hat{P} < 0.45) = P(Z < \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}) = P(Z < \frac{0.45 - 0.51}{0.0353})$$

$$= P(Z < -1.7) = 0.0446$$

2. ما بين 45% الى 60% إناث:

افرض أن $\hat{P}$ تمثل نسبة الإناث بالعينة ، $\hat{P}$ تتبع توزيع طبيعي متوسطه $P = 0.49$ وانحرافه المعياري:

$$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.49(1-0.49)}{200}} = 0.0353$$

والمطلوب هو $P(0.45 < \hat{P} < 0.60)$

$$P(0.45 < \hat{P} < 0.60) = P(\frac{0.45 - 0.49}{0.0353} < Z < \frac{0.60 - 0.49}{0.0353})$$

$$= P(-1.13 < Z < 3.12) = 0.8699$$

مثال: إذا كانت 51% من مجتمع تلقوا تطعيم ضد الالتهاب الكبدي ، فإذا اخترنا من هذا المجتمع عينة حجمها 200 شخص ، فأوجد احتمال أن تقل نسبة الذين تلقوا التطعيم عن الذين لم يتلقوا التطعيم في هذه العينة.

الحل:

افرض أن $\hat{P}$ تمثل نسبة الذين تلقوا التطعيم بالعينة ، $\hat{P}$ تتبع توزيع طبيعي متوسطه $P = 0.51$ وانحرافه المعياري:

$$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.51(1-0.51)}{200}} = 0.0353$$

والمطلوب هو $P(\hat{P} < 0.50)$

$$P(\hat{P} < 0.50) = P(Z < \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}) = P(Z < \frac{0.50 - 0.51}{0.0353})$$
$$= P(Z < -0.28) = 0.3897$$

4. توزيع الفرق بين نسبتين:

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}}$$

حيث:

$\hat{P}_1$ نسبة عينة المجتمع الأول ، $\hat{P}_2$ نسبة عينة المجتمع الثاني، P_1 نسبة المجتمع الأول، P_2 نسبة المجتمع الثاني. n_1 حجم عينة المجتمع الأول، n_2 حجم عينة المجتمع الثاني وكما هو الحال في توزيع نسبة العينة ، سنستخدم توزيع Z فقط.

مثال: مصنع ينتج في العادة ما نسبته 8% من العبوات كبيرة الحجم، ومصنع أخر ينتج في العادة ما نسبته 9% من العبوات كبيرة الحجم ، سحبت من إنتاج المصنع الأول عينة حجمها 2200 عبوة كبيرة الحجم بينما سحب من إنتاج المصنع الثاني عينة حجمها 2500 عبوة كبيرة الحجم ، فإذا كانت $\hat{P}_1$ ترمز لنسبة إنتاج العبوات كبيرة الحجم بعينة المصنع الأول و $\hat{P}_2$ ترمز لنسبة إنتاج العبوات كبيرة الحجم بعينة المصنع الثاني، فأوجد:

1. $P(\hat{P}_1 > 0.08)$
2. $P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \leq 0.07)$
3. $P(-0.05 < \hat{P}_1 - \hat{P}_2 < 0.05)$

الحل:

$$P_1 = 0.08 \ , \ P_2 = 0.09 \ , \ n_1 = 2200 \ , \quad n_2 = 2500$$

1. $P(\hat{P}_1 > 0.08)$:

$$P(\hat{P}_1 > 0.08) = P(Z > \frac{\hat{P}_1 - P_1}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1}}}) = P(Z > \frac{0.08 - 0.08}{\sqrt{\frac{0.08(1-0.08)}{2200}}}) = P(Z > 0) = 0.5$$

2. $P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \leq 0.07)$:

$$P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \leq 0.07) = P(Z \leq \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}})$$
$$= P(Z \leq \frac{0.07 - (0.08 - 0.09)}{\sqrt{\frac{0.08(1-0.08)}{2200} + \frac{0.09(1-0.09)}{2500}}}) = P(Z \leq 9.83) = 1$$

3. $P(-0.05 < \hat{P}_1 - \hat{P}_2 < 0.05)$:

:

$$P(-0.05 < \hat{P}_1 - \hat{P}_2 < 0.05) = P(\frac{-0.05 - (0.08 - 0.09)}{\sqrt{\frac{0.08(1-0.08)}{2200} + \frac{0.09(1-0.09)}{2500}}} < Z$$

$$< \frac{0.05 - (0.08 - 0.09)}{\sqrt{\frac{0.08(1-0.08)}{2200} + \frac{0.09(1-0.09)}{2500}}})$$

$$= P(-4.91 < Z < 7.37) = 1$$

مثال: إذا علم أن نسبة الذكور في المؤسسة A تبلغ 30% وفي المؤسسة B تبلغ 20% ، فإذا سحبت عينتين عشوائيا، الأولى من المؤسسة A وكان حجمها 100 والثانية من المؤسسة B وكان حجمها 200 ، فما احتمال أن يكون الفرق بين نسبتي الذكور في العينتين أكبر من 6%.

الحل:

$$P_1 = 0.30 \ , \ P_2 = 0.20 \ , \ n_1 = 100 \ , \quad n_2 = 200$$

$$P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 > 0.06) = P(Z > \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}})$$

$$= P(Z > \frac{0.06 - (0.30 - 0.20)}{\sqrt{\frac{0.30(1-0.30)}{100} + \frac{0.20(1-0.20)}{200}}} = P(Z > -0.74) = 0.7704$$

****

فترات الثقة

1. **فترة ثقة لتقدير متوسط المجتمع:**

- إذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم (وكان توزيع المجتمع طبيعي أو غير طبيعي بشرط حجم العينة كبير)فإن:

$100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة حول المتوسط μ هي:

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

- إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهول وكان حجم العينة كبير فإن:

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

- إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهول وكانت حجم العينة صغير (وكان توزيع المجتمع طبيعي) فإن:

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1} < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

حيث: $\bar{X}$ متوسط العينة ، σ الانحراف المعياري للمجتمع ، S الانحراف المعياري للعينة ، n حجم العينة.

ملاحظة: (عندما نقول أن حجم العينة كبير فإننا نعني أنها أكبر من 30 وعندما نقول أن حجم العينة صغير فإننا نعني أنها أصغر من 30).

كيفية إيجاد القيمة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: القيمة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ تعني المتغير العشوائي الطبيعي القياسي Z والذي يقع على يمينه مساحة قدرها $\frac{\alpha}{2}$ أي $P\left(Z > Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$ ، فإذا كانت α تساوي 0.05 فنستطيع ايجاد $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ والتي تساوي $Z_{0.025}$ كالتالي:

$$P(Z > Z_{0.025}) = 1 - P(Z < Z_{0.025}) = 0.025 \rightarrow P(Z < Z_{0.025}) = 0.975$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي وعند المساحة 0.975 نجد أن قيمة $Z_{0.025}$ تساوي 1.96 .

مثال: من مجتمع احصائي يتوزع توزيعا طبيعيا متوسطه μ وتباينه 12.25 ، أخذت عينة عشوائية حجمها 49 فكان متوسطها يساوي 45 ، أوجد فترة ثقة 95 % لمتوسط المجتمع.

الحل: تباين المجتمع σ^2 معلوم وبالتالي $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة حول المتوسط هي:

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\bar{X} = 45 \quad , \quad \sigma^2 = 12.25 \quad , \quad \sigma = \sqrt{12.25} = 3.5 \quad , \quad n = 49$$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

ومن خلال الجدول نجد أنه عند 95% فترة ثقة $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96\right)$

$$45 - \frac{3.5}{\sqrt{49}}(1.96) < \mu < 45 + \frac{3.5}{\sqrt{49}}(1.96)$$

$$44.02 < \mu < 45.98$$

الحد الأعلى لفترة الثقة هو 45.98 والحد الأدنى لفترة الثقة هو 44.02 ، وهذا يعني أن احتمال وقوع وسط المجتمع بين القيمتين 44.02 و 45.98 هو 95% .

مثال: إذا كانت أجور العمال بإحدى المؤسسات تتبع في توزيعها التوزيع الطبيعي بانحراف معياري قدره 20 دينار، أوجد فترة ثقة 95% باستخدام عينة الأجور التالية:

$$\{250 \ , \ 150 \ , \ 250 \ , \ 200 \ , \ 150 \ , \ 200 \ , \ 180 \ , \ 150 \ , \ 180 \ , \ 250\}$$

الحل: تباين المجتمع σ^2 معلوم وبالتالي $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة حول المتوسط هي:

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{250+150+250+200+150+200+180+150+180+250}{10} = 196$$

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

ومن خلال الجدول نجد أنه عند 95% فترة ثقة $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96\right)$

$$196 - \frac{20}{\sqrt{10}}(1.96) < \mu < 196 + \frac{20}{\sqrt{10}}(1.96)$$

$$183.6 < \mu < 208.396$$

وعليه يكون الحد الأدنى للأجور 183.6 دينار والحد الأعلى للأجور 208.396 عند مستوى ثقة 95% .

مثال: سحبت عينة عشوائية حجمها 36 من مجتمع متوسطه μ وتباينه σ^2 ، فإذا كان متوسط العينة يساوي 12 وتباين العينة يساوي 16 ، أوجد فترة ثقة 99% لتقدير متوسط المجتمع.

الحل: تباين المجتمع σ^2 مجهول ، $n > 30$ وبالتالي $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة حول المتوسط هي:

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\bar{X} = 12 \quad , \quad S^2 = 16 \quad , \quad n = 36$$

$$1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005$$

من خلال الجدول عند فترة ثقة 99% $\left(z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.575\right)$

$$12 - \frac{4}{\sqrt{36}}(2.575) < \mu < 12 + \frac{4}{\sqrt{36}}(2.575)$$

$$10.283 < \mu < 13.716$$

أي أن الحد الأعلى لفترة الثقة هو 13.716 والحد الأدنى لفترة الثقة هو 10.283 .

مثال: البيانات التالية لعينة عشوائية سحبت من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا متوسطه μ وتباينه σ^2 وكانت كالتالي:

10 , 9 , 11 , 6 , 8 , 7 , 10 , 8 , 9 , 7

أوجد فترة ثقة 95% لوسط المجتمع .

الحل: تباين المجتمع σ^2 مجهول ، $n < 30$ وبالتالي $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة حول المتوسط هي:

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1} < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{10+9+11+6+8+7+10+8+9+7}{10} = 8.5$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{745 - 10 \times 8.5^2}{9} = 2.5 \quad , \quad S = \sqrt{S^2} = 1.5811$$

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{0.025,9} = 2.262$$

$$8.5-\frac{1.5811}{\sqrt{10}}(2.262)<\mu<8.5+\frac{1.5811}{\sqrt{10}}(2.262)$$

$$7.369<\mu<9.63$$

مثال: إذا كان وزن الدجاج بالجرام في أحد المزارع يتبع التوزيع الطبيعي، سحبت عينة عشوائية من أحد المزارع المنتجة للدجاج حجمها 25 دجاجة ، ووجد أن متوسط وزن الدجاج بالعينة 890 جرام، والانحراف المعياري لها 200 جرام.

1. قدر فترة ثقة لمتوسط وزن الدجاج بالمزرعة عند مستوى ثقة 95%.
2. إذا علمت أن تباين وزن الدجاج بالمزرعة هو 62500 ، قدر فترة ثقة لمتوسط وزن الدجاج في المزرعة عند مستوى ثقة 99%.

الحل:

1. قدر فترة ثقة لمتوسط وزن الدجاج بالمزرعة عند مستوى ثقة 95%:

تباين المجتمع σ^2 مجهول ، $n<30$ وبالتالي $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة حول المتوسط هي:

$$\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2},n-1}<\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

$$\bar{X}=890 \quad , \quad n=25 \quad , \quad S=200$$

$$1-\alpha=0.95 \rightarrow \alpha=0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025$$

من خلال جدول t نجد أن: $t_{\frac{\alpha}{2},n-1}=t_{0.025,24}=2.064$

وبذلك يكون حدي فترة الثقة:

$$890-\left(\frac{200}{\sqrt{25}}*2.064\right)<\mu<890+\left(\frac{200}{\sqrt{25}}*2.064\right)$$

$$807.44<\mu<972.56$$

2. إذا علمت أن تباين وزن الدجاج بالمزرعة هو 62500 ، قدر فترة ثقة لمتوسط وزن الدجاج في المزرعة عند مستوى ثقة 99%:

في هذه الحالة أصبح تباين المجتمع معلوم وبالتالي $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة حول المتوسط هي:

$$\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$1-\alpha=0.99 \rightarrow \alpha=0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.005$$

$$\sigma=\sqrt{62500}=250$$

من خلال الجدول $Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.005}=2.575$ ، حدود فترة الثقة هما :

$$890-\left(\frac{250}{\sqrt{25}}*2.575\right)<\mu<890+\left(\frac{250}{\sqrt{25}}*2.575\right)$$

$$761.25<\mu<1018.75$$

2. فترة ثقة لتقدير الفرق بين متوسطي مجتمعين

- إذا كان تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين(وكان توزيع المجتمعين طبيعي أو غير طبيعي بشرط حجم العينة كبير) فإن: $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة للفرق بين المتوسطين $(\mu_1-\mu_2)$:

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<(\mu_1-\mu_2)<(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

• إذا كان تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين ومتساويين $(\sigma_2^2=\sigma_1^2)$وكان حجم العينتين صغير (والمجتمعين طبيعيين)فإن:

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}SP\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<(\mu_1-\mu_2)<(\overline{X}_1-\overline{X}_2)$$

$$+t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}SP\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

حيث:

$$SP^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

• إذا كان تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وكان حجم العينتين كبير فإن:

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}<(\mu_1-\mu_2)<(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

حيث: σ_1^2 ، σ_2^2 تباين المجتمعين الأول والثاني على الترتيب، $\overline{X}_1$ ، $\overline{X}_2$ متوسط العينة الأولى والثانية على الترتيب، S_1^2 ، S_2^2 تباين العينة الأولى والثانية على الترتيب، n_1 ، n_2 حجم العينتين على الترتيب.

مثال: من مجتمعين مستقلين سحبت عينة عشوائية من المجتمع الأول والذي يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu_1,6)$ وسحبت عينة عشوائية أخرى من المجتمع الثاني الذي يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu_2,12)$ ، فإذا كانت كل عينة تمثل سرعة إنجاز تمرين معين ، وكانت بيانات العينتين كالتالي:

$$X_1: 20, 18, 22, 22, 18, 20, 25, 25$$

$$X_2: 25, 22, 24, 23, 25, 30, 30, 27, 20$$

أوجد فترة ثقة 95% للفرق بين سرعة انجاز المجموعتين.

الحل:

تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين وبذلك $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للفرق بين المتوسطين $(\mu_1-\mu_2)$:

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<(\mu_1-\mu_2)<(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\sigma_1^2=6,\ \ \sigma_2^2=12\ ,n_1=8\ \ ,\ \ n_2=9$$

$$\overline{X}_1=\frac{\sum X_1}{n_1}=\frac{20+18+22+22+18+20+25+25}{8}=21.25$$

$$\overline{X}_2=\frac{\sum X_2}{n_2}=\frac{25+22+24+23+25+30+30+27+20}{9}=25.11$$

$$1-\alpha=0.95\ \rightarrow\alpha=0.05\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.025$$

ومن خلال الجدول نجد أنه عند 95% فترة ثقة $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96\right)$

$$(21.25 - 25.11) - (1.96)\sqrt{\frac{6}{8} + \frac{12}{9}} < (\mu_1 - \mu_2)$$

$$< (21.25 - 25.11) + (1.96)\sqrt{\frac{6}{8} + \frac{12}{9}}$$

$$-6.69 < (\mu_1 - \mu_2) < -1.03$$

مثال: من مجتمعين مستقلين سحبت عينة عشوائية من المجتمع الأول والذي يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu_1, \sigma)$ وسحبت عينة عشوائية أخرى من المجتمع الثاني الذي يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu_2, \sigma)$ ، فإذا كانت كل عينة تمثل سرعة إنجاز تمرين معين ، وكانت بيانات العينتين كالتالي:

$$X_1: 20, 18, 22, 22, 18, 20, 25, 25$$

$$X_2: 25, 22, 24, 23, 25, 30, 30, 27, 20$$

أوجد فترة ثقة 95% للفرق بين سرعة انجاز المجموعتين.

الحل:

تباين المجتمعين مجهول ومتساويين وحجم العينتين صغير ، وبذلك $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للفرق بين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$$

$$+ t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n_1} = \frac{20 + 18 + 22 + 22 + 18 + 20 + 25 + 25}{8} = 21.25$$

$$\overline{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n_2} = \frac{25 + 22 + 24 + 23 + 25 + 30 + 30 + 27 + 20}{9} = 25.11$$

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{X}_1^2}{n-1} = \frac{3666 - 3612.5}{7} = 7.64$$

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{X}_2^2}{n-1} = \frac{5768 - 5674.6}{8} = 11.67$$

$$SP^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(8-1)7.64 + (9-1)11.67}{8 + 9 - 2} = 9.789$$

$$SP = \sqrt{SP^2} = 3.128$$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} = t_{0.025, 8+9-2} = t_{0.025, 15} = 2.131$$

$$(21.25-25.11)-(2.131)(3.128)\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}<(\mu_1-\mu_2)<(21.25-25.11)$$

$$+(2.131)(3.128)\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}$$

$$-7.1<(\mu_1-\mu_2)<-0.621$$

مثال: أوجد فترة ثقة 98% للفرق بين وسطي مجتمعين طبيعيين مستقلين إذا علمت أن حجم العينة الاولى 160 ووسطها 81.2 وتباينها 7.6 ،وحجم العينة الثانية 90 ووسطها 76.4 وتباينها 8.2 .

الحل:

تباين المجتمعين مجهول وحجم العينتين كبير ، وبذلك $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للفرق بين المتوسطين $(\mu_1-\mu_2)$:

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}<(\mu_1-\mu_2)<(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$n_1=160\ ,\overline{X}_1=81.2\ ,S_1^2=7.6\ \ ,n_2=90\ ,\overline{X}_2=76.4\ ,S_2^2=8.2$$

$$1-\alpha=0.98\rightarrow\alpha=0.02\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.01$$

ومن خلال الجدول نجد أنه عند 98% فترة ثقة $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.01}\approx 2.33\right)$

$$(81.2-76.4)-(2.33)\sqrt{\frac{7.6}{160}+\frac{8.2}{90}}<(\mu_1-\mu_2)<(81.2-76.4)+(2.33)\sqrt{\frac{7.6}{160}+\frac{8.2}{90}}$$

$$3.93<(\mu_1-\mu_2)<5.66$$

3. **فترة ثقة لتقدير النسبة:** $100\%(1-\alpha)$ فترة ثقة لتقدير نسبة المجتمع هي:

$$\widehat{P}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}}<P<\widehat{P}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}}$$

حيث $\widehat{P}$ تمثل نسبة العينة و n حجم العينة .

مثال: في مصنع لإنتاج الأحذية أخذت عينة عشوائية حجمها 500 حذاء، ووجد أن 100 حذاء منها معيبة. أوجد بدرجة ثقة 99% نسبة المعيب في الإنتاج كله.

الحل:

$100\%(1-\alpha)$ فترة ثقة لتقدير النسبة تكون:

$$\widehat{P}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}}<P<\widehat{P}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}}$$

حيث:

$$\widehat{P}=\frac{X}{n}=\frac{100}{500}=0.2\qquad,\qquad n=500$$

$$1-\alpha=0.99\rightarrow\alpha=0.01\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.005$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.575$$

$$0.2 - 2.575\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{500}} < P < 0.2 + 2.575\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{500}}$$

$$0.154 < P < 0.246$$

مثال: سجلت عينة عشوائية لطلاب إحدى المدارس ووجد أن 30 طالبا منهم يستخدمون اليد اليسرى أثناء الكتابة، فإذا كان حجم العينة هو 250 طالبا، أوجد 95% فترة ثقة حول نسبة الطلاب الذين يستخدمون أيديهم اليسرى أثناء الكتابة في هذه المدرسة.

الحل: $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة حول نسبة المجتمع هي:

$$\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \le P \le \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

$$\hat{P} = \frac{X}{n} = \frac{30}{250} = 0.12$$

95 % فترة ثقة ← $\left[z_{(\frac{\alpha}{2})} = 1.96\right]$

$$0.12 - 1.96\sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{250}} \le P \le 0.12 + 1.96\sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{250}}$$

$$0.0797 \le P \le 0.16$$

4. فترة ثقة لتقدير الفرق بين نسبتي مجتمعين: $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة لتقدير الفرق بين نسبتي مجتمعين هي:

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} < P_1 - P_2$$

$$< (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$$

$\hat{P}_1$ ، $\hat{P}_2$ نسبة عينة المجتمع الأول والثاني على التوالي، n_1،n_2 حجم عينة المجتمع الأول والثاني على التوالي.

مثال: لمقارنة نسبة الطلاب الذين تقديرهم ممتاز في جامعتين، أخذت عينة من الجامعة A حجمها 600 طالب فوجد من بينهم 300 طالب تقديرهم ممتاز، وأخذت عينة من الجامعة B حجمها 1000 طالب فوجد من بينهم 600 طالب تقديرهم ممتاز، أوجد فترة 90% ثقة حول الفرق ما بين نسبتي الطلبة الممتازين في الجامعتين.

الحل: $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة لتقدير الفرق بين نسبتي مجتمعين هي:

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{(\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n2}} \le P_1 - P_2 \le (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) +$$

$$z_{(\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n2}}$$

$$\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{300}{600} = 0.5 \quad , \hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{600}{1000} = 0.6$$

90 % فترة ثقة ← $\left[z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1.645\right]$

$$(0.5-0.6) - 1.645\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{600} + \frac{0.6(1-0.6)}{1000}} \leq P_1 - P_2 \leq (0.5-0.6) +$$

$$1.645\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{600} + \frac{0.6(1-0.6)}{1000}}$$

$$(0.5-0.6) - 0.042154 \leq P_1 - P_2 \leq (0.5-0.6) + 0.042154$$

$$-0,142154 \leq P_1 - P_2 \leq -0.057846$$

مثال: سجلت 80 حالة نجاح عملية في المستشفى A من بين 90 عملية، وفي المستشفى B سجلت 50 عملية ناجحة من بين 70 عملية ، أوجد فترة ثقة 90 % للفرق بين نسبتي النجاح في المشفيين.

الحل: $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة لتقدير الفرق بين نسبتي مجتمعين هي:

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n2}} \leq P_1 - P_2 \leq (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) +$$

$$z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n2}}$$

$$\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{80}{90} = 0.8889 \quad , \hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{50}{70} = 0.71428$$

90 % فترة ثقة ← $\left[z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1.645\right]$

$$(0.8889 - 0.71428) - 1.645\sqrt{\frac{(0.8889)(0.111)}{90} + \frac{0.71428(0.28572)}{70}} \leq P_1 - P_2$$

$$\leq (0.8889 - 0.71428) + 1.645\sqrt{\frac{(0.8889)(0.111)}{90} + \frac{0.71428(0.28572)}{70}}$$

$$0.070 \leq P_1 - P_2 \leq 0.278$$

****

اختبارات الفروض

مفاهيم عامة:

- يتكون الفرض الإحصائي من الفرض العدم والفرض البديل.
- يرمز إلى فرض العدم أو (الفرض الصفري) بالرمز H_0 ويرمز إلى الفرض البديل بالرمز H_1 .
- فرض العدم (الفرض الصفري) يمثل حالة الوضع الراهن أي الحالة التي يريد أن يرفضها الباحث الاحصائي.
- الفرض البديل يمثل الحالة التي يرغب الباحث الاحصائي اثباتها.
- رفض فرض العدم وهو صحيح يسمى خطأ من النوع الأول ويرمز لاحتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول بالرمز α.
- قبول فرض العدم وهو غير صحيح يسمى خطأ من النوع الثاني ويرمز لاحتمال الوقوع في خطأ من النوع الثاني بالرمز β.
- رفض H_0 عندما تكون H_0 خطأ أي اتخاذ قرار صحيح يسمى بقوة الاختبار ويرمز له بالرمز $1-\beta$.

1. اختبارات الفروض حول المتوسط (μ)

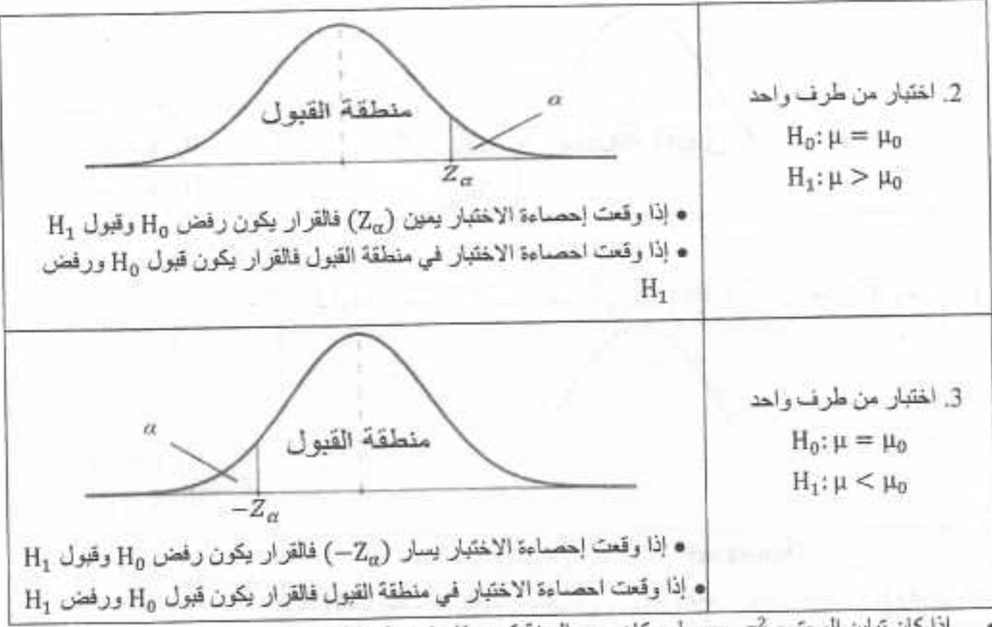
- إذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم فإن إحصاءة الاختبار(وكان المجتمع طبيعي أو غير طبيعي بشرط حجم العينة كبير) هي:

$$Z_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

حيث: $\bar{X}$ متوسط المجتمع ، σ الانحراف المعياري للمجتمع ، n حجم المجتمع.

و بذلك يكون قرار قبول فرض العدم أو رفضه وفقا للمقارنة بين احصاءة الاختبار والقيمة الجدولية كما يوضحها الجدول التالي:

الفرضية الاحصائية	القرار
1. اختبار من طرفين $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$\frac{\alpha}{2}$ منطقة القبول $\frac{\alpha}{2}$ $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ • إذا وقعت إحصاءة الاختبار (Z_C) يمين $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ أو يسار $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ أي وقعت في منطقة الرفض فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1 • إذا وقعت احصاءة الاختبار في منطقة القبول فالقرار يكون قبول H_0 ورفض H_1



القرار	الفرضية الاحصائية
• إذا وقعت إحصاءة الاختبار يمين (Z_α) فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1 • إذا وقعت احصاءة الاختبار في منطقة القبول فالقرار يكون قبول H_0 ورفض H_1	2. اختبار من طرف واحد $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$
• إذا وقعت إحصاءة الاختبار يسار $(-Z_\alpha)$ فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1 • إذا وقعت احصاءة الاختبار في منطقة القبول فالقرار يكون قبول H_0 ورفض H_1	3. اختبار من طرف واحد $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$

• إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهول وكان حجم العينة كبير فإن احصاءة الاختبار:

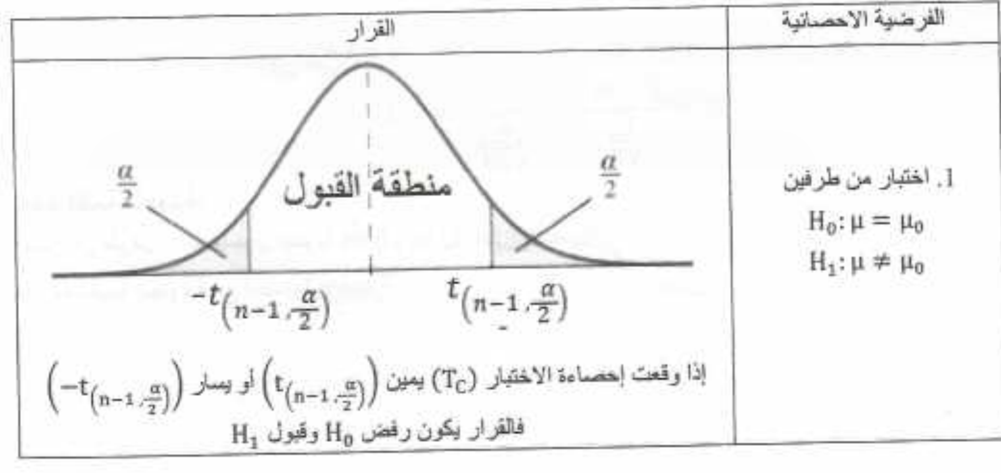
$$Z_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

حيث S الانحراف المعياري للعينة ، وفي هذه الحالة يكون جدول الفرضية الإحصائية والقرار نفس الجدول السابق.

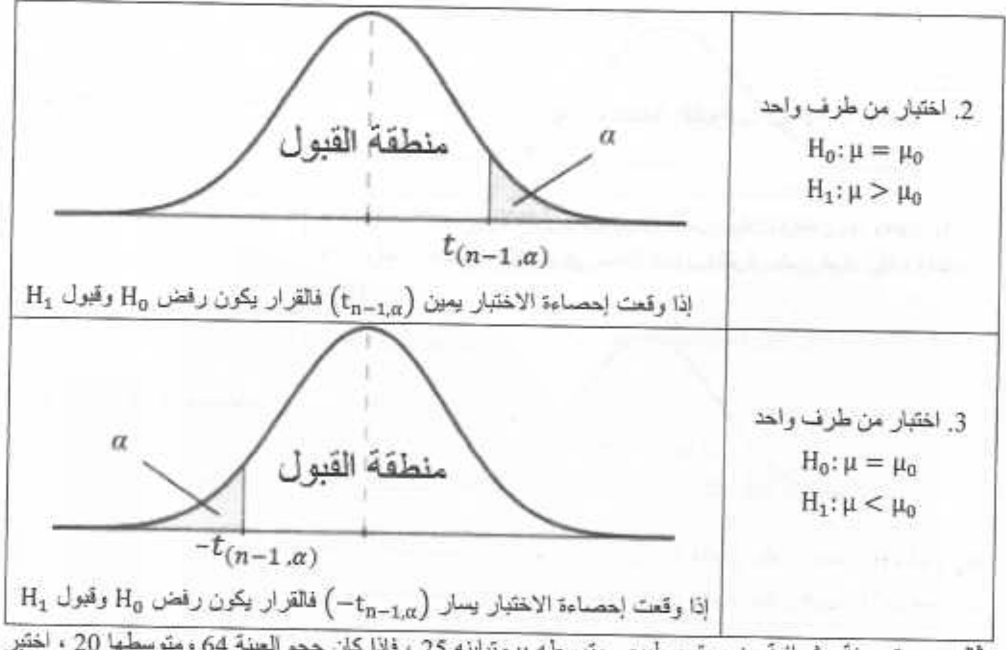
• إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهول وكان حجم العينة صغير (والمجتمع طبيعي) فإن احصاءة الاختبار:

$$T_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

ملاحظة: (عندما نقول أن حجم العينة كبير فإننا نعني أنها أكبر من 30 وعندما نقول أن حجم العينة صغير فإننا نعني أنها أصغر من 30).



القرار	الفرضية الاحصائية
إذا وقعت إحصاءة الاختبار (T_C) يمين $\left(t_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}\right)$ أو يسار $\left(-t_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}\right)$ فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1	1. اختبار من طرفين $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$



2. اختبار من طرف واحد $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	منطقة القبول ، α ، $t_{(n-1,\alpha)}$ إذا وقعت إحصاءة الاختبار يمين $(t_{n-1,\alpha})$ فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1
3. اختبار من طرف واحد $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	منطقة القبول ، α ، $-t_{(n-1,\alpha)}$ إذا وقعت إحصاءة الاختبار يسار $(-t_{n-1,\alpha})$ فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1

مثال: سحبت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه 25 ، فإذا كان حجم العينة 64 ومتوسطها 20 ، اختبر الفرض القائل بأن متوسط المجتمع لا يختلف عن 18 وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

الحل:

صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0: \mu = 18$$
$$H_1: \mu \neq 18$$

حساب احصاءة الاختبار:

تباين المجتمع σ^2 معلوم فإن إحصاءة الاختبار هي:

$$Z_C = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

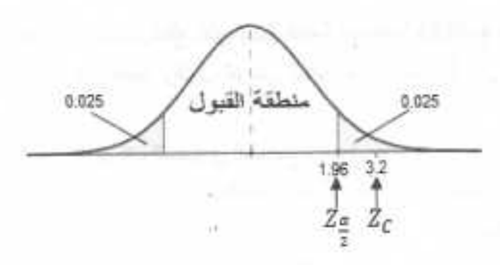
$$\sigma^2 = 25 \ , \quad \overline{X} = 20 \quad , \ n = 64$$

$$Z_C = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{20 - 18}{\frac{5}{\sqrt{64}}} = 3.2$$

تحديد القيمة الجدولية:

اختبار من طرفين ،عند مستوى معنوية 0.05 ، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = \mp 1.96$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار:



اختبار من الطرفين نجد أن احصاءة الاختبار تقع يمين القيمة الجدولية $(3.2 > 1.96)$ أي أنها تقع في منطقة الرفض ، القرار هو: رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل أي أن متوسط المجتمع لا يساوي 18 .

مثال: سحبت عينة عشوائية من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بانحراف معياري 3 يمثل أوزان تلاميذ في الصف الأول الأساسي وكانت أوزان التلاميذ في العينة هي:

$$\{28, 22, 23, 20, 30, 29, 26, 29, 26, 27\}$$

اختبر عند مستوى معنوية 5% الفرضية $H_0: \mu = 24$ مقابل $H_1: \mu > 24$.

الحل:

صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0: \mu = 24$$
$$H_1: \mu > 24$$

حساب احصاءة الاختبار:

تباين المجتمع σ^2 معلوم فإن إحصاءة الاختبار هي:

$$Z_C = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\sigma = 3 \ , \ n = 10$$

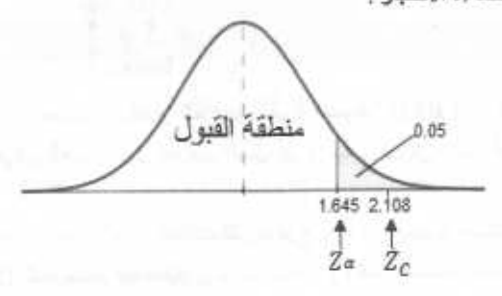
$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{28 + 22 + 23 + 20 + 30 + 29 + 26 + 29 + 26 + 27}{10} = 26$$

$$Z_C = \frac{26 - 24}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = 2.108$$

تحديد القيمة الجدولية:

اختبار من طرف واحد نحو اليمين ،عند مستوى معنوية 0.05 ، $Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.645$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :



اختبار الطرف الأيمن نجد أن احصاءة الاختبار تقع على يمين القيمة الجدولية ($2.108 > 1.645$) أي أنها تقع في منطقة الرفض ، القرار هو: رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل أي أن معدل أوزان تلاميذ الصف الأول الأساسي أكبر من 24 .

مثال: أعد المثال السابق بافتراض أن الانحراف المعياري للمجتمع مجهول.

الحل:

صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0: \mu = 24$$
$$H_1: \mu > 24$$

حساب احصاءة الاختبار:

تباين المجتمع σ^2 مجهول ، $n < 30$ فإن إحصاءة الاختبار هي:

$$T_C = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{28 + 22 + 23 + 20 + 30 + 29 + 26 + 29 + 26 + 27}{10} = 26$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{6860 - 6760}{10 - 1} = 11.11$$

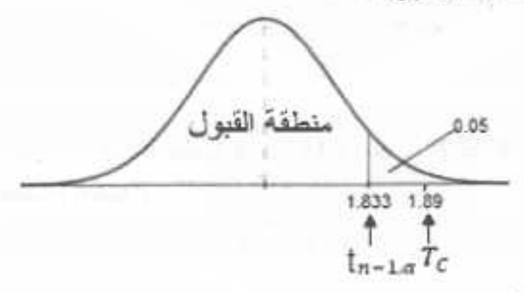
$$S = \sqrt{S^2} = 3.33$$

$$T_C = \frac{26 - 24}{\frac{3.33}{\sqrt{10}}} = 1.89$$

تحديد القيمة الجدولية:

اختبار من طرف واحد نحو اليمين ،عند مستوى معنوية 0.05، $\left(t_{n-1,\alpha} = t_{9,0.05} = 1.833\right)$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :



اختبار الطرف الأيمن ، نجد أن احصاءة الاختبار تقع يمين القيمة الجدولية ($1.89 > 1.833$) أي أنها تقع في منطقة الرفض ، القرار هو: رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل أي أن معدل أوزان تلاميذ الصف الأول الأساسي أكبر من 24 .

مثال: شركة متخصصة في صناعة لعب الأطفال تعاقدت لشراء نوع جديد من الخيوط الصناعية، يدعي صانع هذه الخيوط أن متوسط قوة تحمل الخيط 15 كجم بانحراف معياري نصف كجم . ولاختبار صحة ادعاء الصانع أخذت عينة عشوائية

من 50 خيطاً وتم اختبارها فوجد أن متوسط قوة التحمل في العينة 14.8كجم . فهل يمكننا تأييد ادعاء الصانع؟ استخدم مستوى معنوية 5 % .

الحل:

صياغة الفرض الإحصائي:

الفرض العدم : عدم وجود فرق معنوي بين متوسط الخيوط القديمة والجديدة ضد الفرض البديل وهو وجود فرق معنوي بين متوسط الخيوط القديمة والجديدة :

$$H_0: \mu = 15$$
$$H_1: \mu \neq 15$$

إيجاد قيمة احصاءة الاختبار:

$$\bar{X} = 14.8 \ , \qquad \sigma = 0.5 \ , \qquad n = 50$$

حيث أن σ^2 معلومة فإن احصاءة الاختبار هي Z_C:

$$Z_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{14.8 - 15}{\frac{0.5}{\sqrt{50}}} = -2.828$$

تحديد القيمة الجدولية:

عندى مستوى معنوية 5% ، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = \mp 1.96$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :

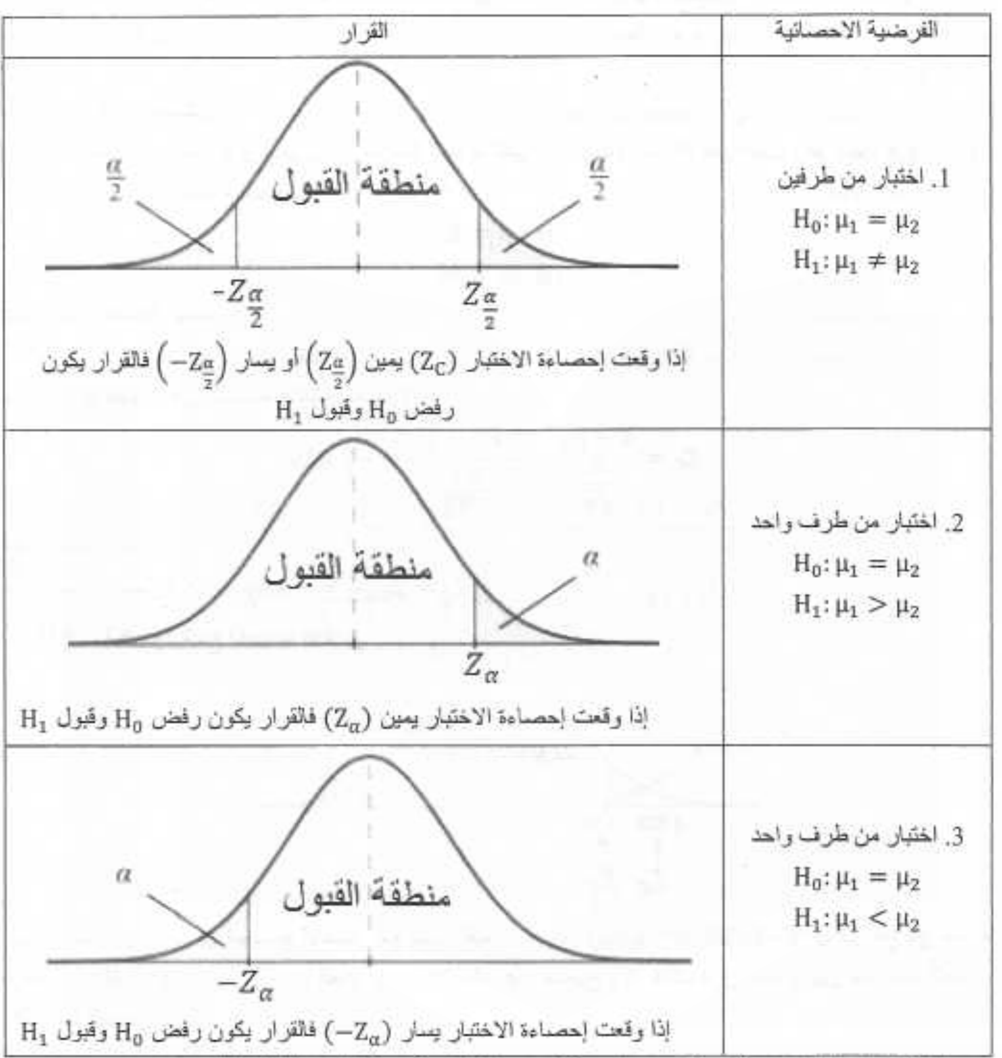


اختبار الطرفين ، نجد أن احصاءة الاختبار تقع يسار القيمة الجدولية $(-2.828 < -1.96)$ أي أنها تقع في منطقة الرفض ، القرار هو: رفض فرض العدم أي أن الادعاء غير صحيح وأن هناك فرق معنوي بين المتوسط الحقيقي والمتوسط المدعى.

2. اختبارات الفروض حول الفرق بين متوسطي مجتمعين

- إذا كان تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين(وكان المجتمعين طبيعيين أو غير طبيعيين بشرط حجم العينتين كبير) فإن احصاءة الاختبار:

$$Z_C = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$



القرار	الفرضية الاحصائية
إذا وقعت إحصاءة الاختبار (Z_C) يمين $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ أو يسار $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1	1. اختبار من طرفين $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
إذا وقعت إحصاءة الاختبار يمين (Z_α) فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1	2. اختبار من طرف واحد $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 > \mu_2$
إذا وقعت إحصاءة الاختبار يسار ($-Z_\alpha$) فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1	3. اختبار من طرف واحد $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 < \mu_2$

- إذا كان تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وكان حجم العينتين كبير فإن احصاءة الاختبار:

$$Z_C = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

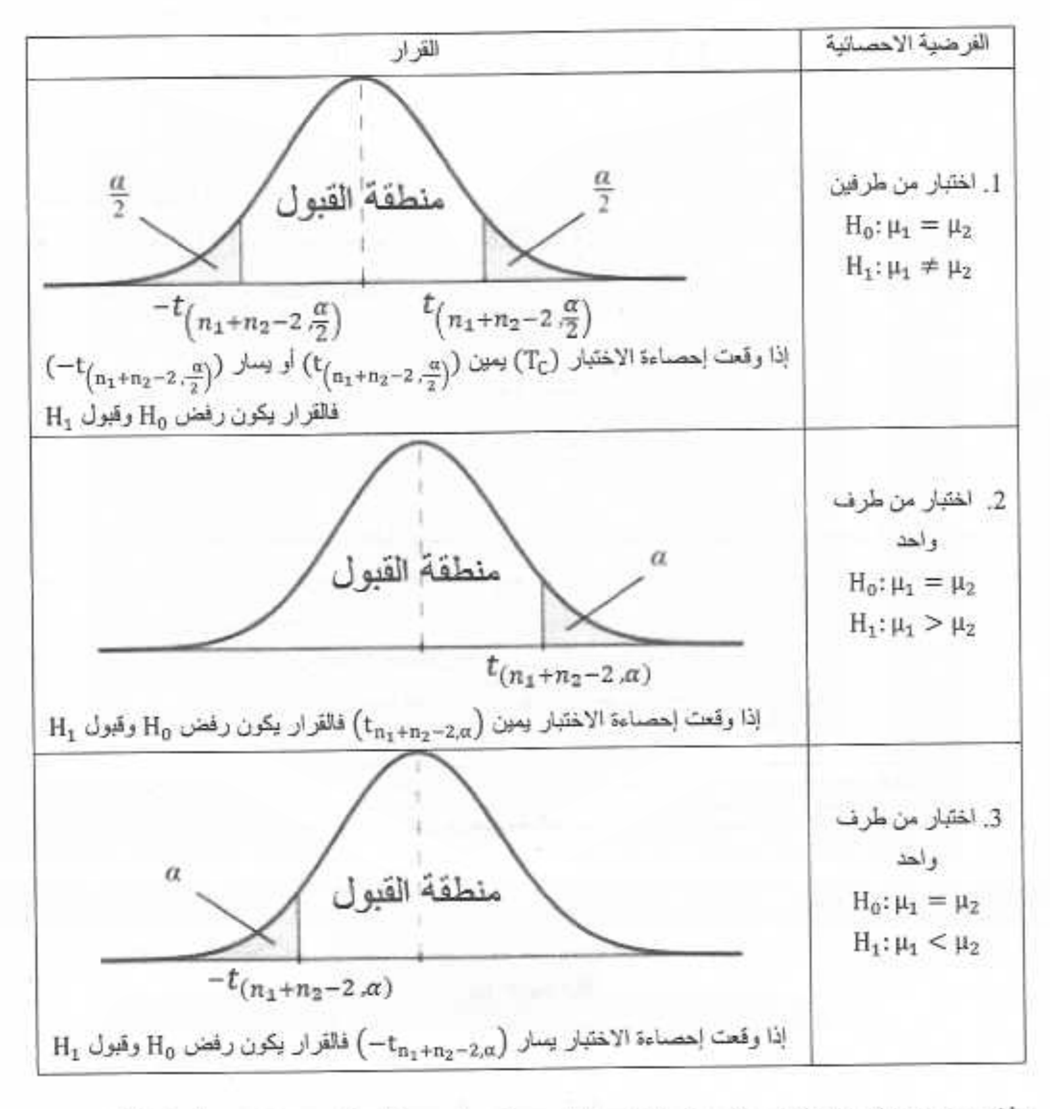
وفي هذه الحالة يكون جدول الفرضية الإحصائية والقرار نفس الجدول السابق.

- إذا كان تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و متساويين وكان حجم العينتين صغير (والمجتمعين طبيعيين) فإن احصاءة الاختبار:

$$T_C = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$\overline{X}_1$ متوسط العينة الأولى ، $\overline{X}_2$ متوسط العينةالثانية، μ_1 متوسط المجتمع الأول، μ_2 متوسط المجتمع الثاني، S_1^2، S_2^2 تباين العينة الأولى والثانية على التوالي، n_1 ، n_2 حجم العينتين ، يمكن ايجاد SP من خلال قانون التباين المشترك SP^2 كالتالي:

$$SP^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad , \quad SP = \sqrt{SP^2}$$



الفرضية الاحصائية	القرار
1. اختبار من طرفين $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	منطقة القبول، $\frac{\alpha}{2}$، $\frac{\alpha}{2}$، $-t_{(n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2})}$، $t_{(n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2})}$ إذا وقعت إحصاءة الاختبار (T_C) يمين $\left(t_{(n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2})}\right)$ أو يسار $\left(-t_{(n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2})}\right)$ فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1
2. اختبار من طرف واحد $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 > \mu_2$	منطقة القبول، α، $t_{(n_1+n_2-2,\alpha)}$ إذا وقعت إحصاءة الاختبار يمين $\left(t_{n_1+n_2-2,\alpha}\right)$ فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1
3. اختبار من طرف واحد $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 < \mu_2$	منطقة القبول، α، $-t_{(n_1+n_2-2,\alpha)}$ إذا وقعت إحصاءة الاختبار يسار $\left(-t_{n_1+n_2-2,\alpha}\right)$ فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1

مثال: سحبت عينة عشوائية من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_1 وتباين 36 ، وسحبت عينة عشوائية أخري من مجتمع طبيعي أخر متوسطه μ_2 وتباينه 25 ، إذا كان حجم العينة الأولى 16 ومتوسطها يساوي 30 ، وحجم العينة الثانية 12 ومتوسطها يساوي 33 ، فاختبر وجود فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين عند مستوى معنوية 10% .

الحل:

صياغة الفرضية الاحصائية:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

حساب احصاءة الاختبار:

$$\sigma_1^2 = 36 \ , \quad \bar{X}_1 = 30, \quad n_1 = 16 \quad \sigma_2^2 = 25 \ , \bar{X}_2 = 33, n_2 = 12$$

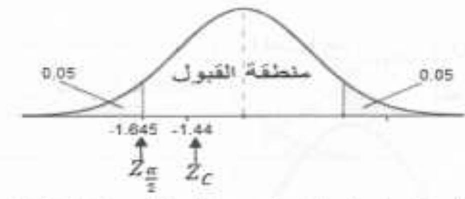
تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين ، احصاءة الاختبار هي:

$$Z_C = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(30 - 33) - (0)}{\sqrt{\frac{36}{16} + \frac{25}{12}}} = -1.44$$

تحديد القيمة الجدولية:

عندى مستوى معنوية 10% واختبار من طرفين ، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = \mp 1.645$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار



اختبار الطرفين ، نلاحظ أن احصاءة الاختبار السالبة تقع يمين القيمة الجدولية السالبة $(-1.645 < -1.44)$ أي أنها تقع في منطقة القبول، أي نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل والمجتمعان لهما تقريبا نفس الوسط الحسابي أي أنه لا يوجد فرق معنوي بين المتوسطين.

مثال: أخذت عينتان من مجتمعين طبيعيين مستقلين ، والجدول التالي يبين بعض احصاءاتهما:

	حجم العينة	متوسط العينة	الانحراف المعياري للعينة
المجتمع الأول	50	57.5	6.2
المجتمع الثاني	60	54.4	10.6

يدّعي أحد الباحثين أن متوسط المجتمع الاول أكبر من متوسط المجتمع الثاني. اختبر صحة هذا الادعاء عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

الحل:

صياغة الفرضية الاحصائية:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

حساب احصاءة الاختبار:

تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين كبير ، احصاءة الاختبار هي:

$$Z_C = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

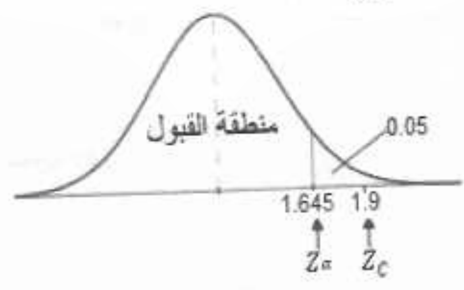
$$\bar{X}_1 = 57.5 \ , S_1 = 6.2 \ , n_1 = 50 \ , \quad \bar{X}_2 = 54.4 \ , S_2 = 10.6 \ , n_2 = 60$$

$$Z_C = \frac{(57.5 - 54.4) - 0}{\sqrt{\frac{6.2^2}{50} + \frac{10.6^2}{60}}} = 1.9$$

تحديد القيمة الجدولية:

عندى مستوى معنوية 0.05 واختبار من طرف واحد، $Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.645$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :



اختبار الطرف الأيمن نلاحظ أن احصاءة الاختبار تقع يمين القيمة الجدولية ($1.9 > 1.645$) أي أنها تقع في منطقة الرفض ,وبالتالي القرار يكون برفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة ويعتبر ذلك دليلا كافيا بأن متوسط المجتمع الاول أكبر من متوسط المجتمع الثاني.

مثال: أخذت عينة عشوائية من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ وكانت بياناتها كالتالي:

$$\{5, 6, 3, 7, 8\}$$

وسحبت عينة عشوائية أخرى من مجتمع أخر يتبع التوزيع الطبيعي $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ وكانت بياناتها كالتالي:

$$\{12, 10, 8, 12, 9, 5\}$$

اختبر وجود فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

حساب احصاءة الاختبار:

تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و متساويين وحجم العينتين صغير :

$$T_C = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n_1} = \frac{5 + 6 + 3 + 7 + 8}{5} = 5.8$$

$$\overline{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n_2} = \frac{12 + 10 + 8 + 12 + 9 + 5}{6} = 9.33$$

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n_1\bar{x}^2}{n_1 - 1} = \frac{183 - 168.2}{5 - 1} = 3.7$$

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n_2\bar{x}^2}{n_2 - 1} = \frac{558 - 522.3}{6 - 1} = 7.14$$

$$SP^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(5 - 1)3.7 + (6 - 1)7.14}{5 + 6 - 2} = 5.611$$

$$SP = \sqrt{SP^2} = 2.3687$$

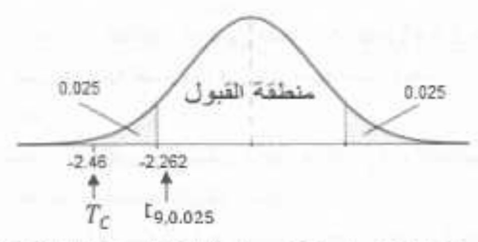
$$T_C = \frac{(5.8 - 9.33) - (0)}{2.3687\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}} = -2.46$$

تحديد القيمة الجدولية:

اختبار من طرفين ،عند مستوى معنوية 0.05 :

$$\left(t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}}\right) = \left(t_{9,0.025}\right) = \mp 2.262$$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :



اختبار من طرفين ، نجد أن احصاءة الاختبار السالبة تقع يسار القيمة الجدولية السالبة (2.262− > 2.46−) أي أنها تقع في منطقة الرفض ، القرار هو: رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل أي أنه يوجد فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين عند مستوى معنوية 5% .

مثال: اختيرت عينة عشوائية من 60 طالبا من جامعة خاصة،فوجد أن متوسط ذكائهم 69 درجة وتباين قدره 230 درجة، كذلك تم اختيار عينة عشوائية أخرى من 85 طالب من احدى الجامعات العامة فوجد أن متوسط ذكائهم 74 درجة وتباين قدره 215 درجة. اختبر الفرض القائل بأن متوسط ذكاء طالب الجامعة الخاصة أقل من متوسط ذكاء طالب الجامعة العامة وذلك عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

صياغة الفرضية الاحصائية:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 < \mu_2$$

حيث μ_1 متوسط ذكاء طالب الجامعة الخاصة، μ_2 متوسط ذكاء طالب الجامعة العامة.

حساب احصاءة الاختبار:

$$\bar{X}_1 = 69\,, S_1^2 = 230\,\,, n_1 = 60\,, \qquad \bar{X}_2 = 74\,, S_2^2 = 215\,, n_2 = 85$$

تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم كل من العينتين كبير ،احصاءة الاختبار هي:

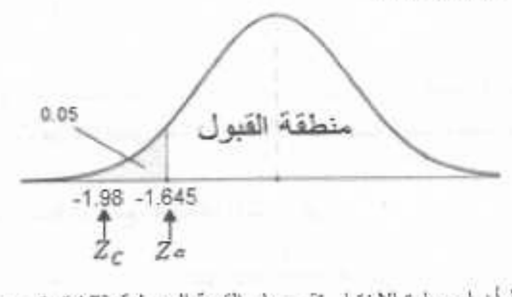
$$Z_C = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$Z_C = \frac{(69 - 74) - 0}{\sqrt{\frac{230}{60} + \frac{215}{85}}} = -1.98$$

تحديد القيمة الجدولية:

عندى مستوى معنوية 5% واختبار من طرف واحد (الطرف الأيسر)، $-Z_\alpha = -Z_{0.05} = -1.645$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :



اختبار الطرف الأيسر ،نلاحظ أن احصاءة الاختبار تقع يسار القيمة الجدولية ($-1.645 > -1.98$) اي أنها تقع في منطقة الرفض ومن هنا يمكن القول أن متوسط ذكاء طلبة الجامعة الخاصة أقل من متوسط ذكاء طلبة الجامعة العامة.

مثال: اختيرت عينة عشوائية من 11 طالب من كلية الهندسة فوجد أن متوسط ذكائهم 80 درجة بانحراف معياري 7 درجات، كذلك اختيرت عينة عشوائية من 6 طلاب من كلية العلوم فوجد أن متوسط ذكائهم 75 درجة بانحراف معياري 5 درجات، بافتراض أن مجتمعي كلية الهندسة والعلوم يتبعان التوزيع الطبيعي. هل يمكننا القول بأن متوسط ذكاء طلبة الهندسة لا يساوي متوسط ذكاء طلبة العلوم عند مستوى معنوية 5%؟

الحل:

صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

حساب احصاءة الاختبار:

$$\bar{X}_1 = 80, S_1 = 7, n_1 = 11, \quad \bar{X}_2 = 75, S_2 = 5, n_2 = 6$$

تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين صغير ، احصاءة الاختبار هي:

$$T_C = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$SP^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 41$$

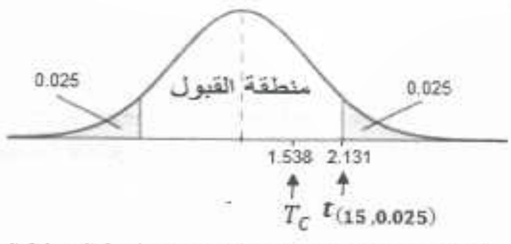
$$T_C = \frac{5-0}{\sqrt{41}\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{6}}} = 1.538$$

تحديد القيمة الجدولية:

باعتبار أنه اختبار من الطرفين فإن قيمة t الجدولية هي:

$$t_{\left(n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}\right)} = t_{(15,0.025)} = \mp 2.131$$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :

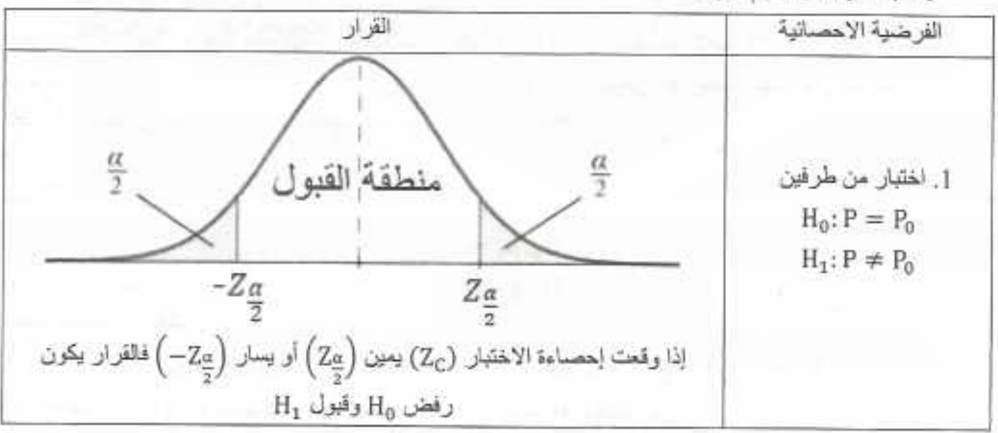


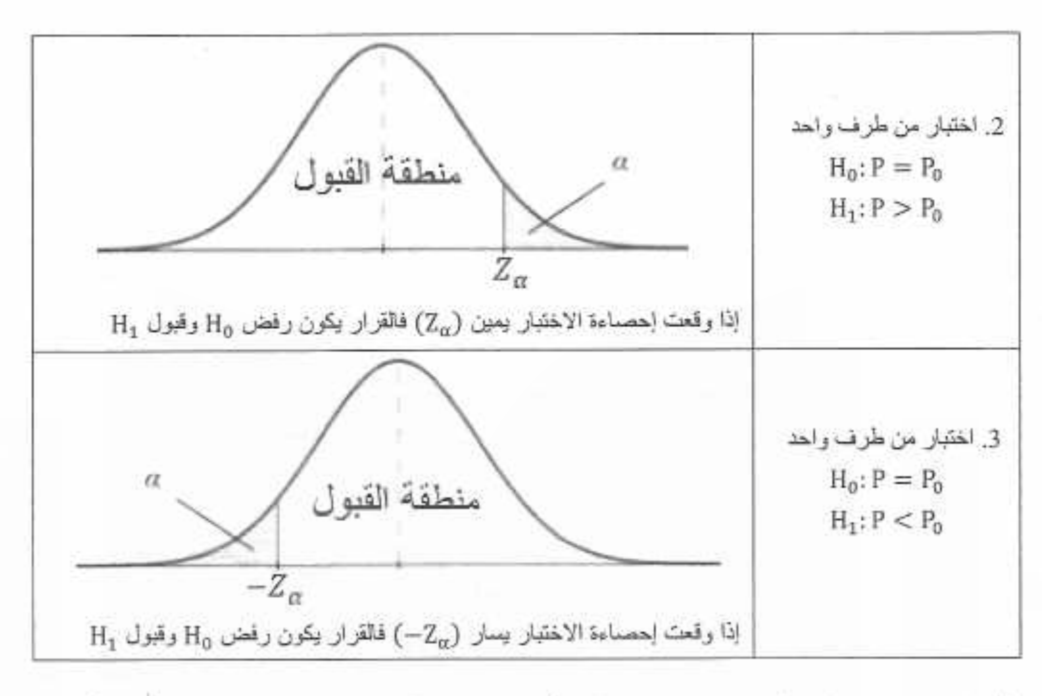
اختبار من طرفين ،نلاحظ أن قيمة احصاءة الاختبار الموجبة تقع يسار القيمة الجدولية الموجبة $(1.538 < 2.131)$ أي أنها تقع في منطقة القبول ، ومن هنا يمكن القول أن متوسط ذكاء طلبة الهندسة مساو لمتوسط ذكاء طلبة العلوم عند مستوى معنوية 5%.

3. **اختبارات الفروض حول نسبة المجتمع، احصاءة الاختبار هي:**

$$Z_C = \frac{\hat{P}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

$\hat{P}$ نسبة العينة ، n حجم العينة.

القرار	الفرضية الاحصائية
 إذا وقعت إحصاءة الاختبار (Z_C) يمين $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ أو يسار $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1	1. اختبار من طرفين $H_0: P = P_0$ $H_1: P \neq P_0$



مثال: قامت احدى شركات الكمبيوتر باستيراد شحنة من أجهزة الكمبيوتروقد تعهدت الشركة المصدرة للأجهزة بأن نسبة الأجهزة المعيبة لن تزيد عن 6%، تم اختيار عينة عشوائية من 180جهاز وتبين وجود 20 جهاز معيب ، فهل هذا يدعم الشك في ادعاء الشركة عندى مستوى معنوية 1%.

الحل: (تلميح: الشك في ادعاء الشركة يعني أن نسبة الأجهزة المعيبة تزيد عن 6%).

صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0: P = 0.06$$
$$H_1: P > 0.06$$

حساب احصاءة الاختبار:

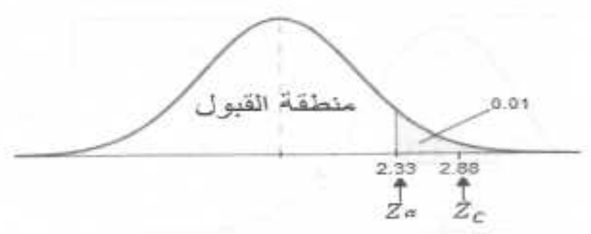
$$\hat{P} = \frac{20}{180} = 0.11111 \quad , \quad P_0 = 0.06$$

$$Z_C = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0.11111 - 0.06}{\sqrt{\frac{0.06(1-0.06)}{180}}} = 2.88$$

تحديد القيمة الجدولية:

عند مستوى 1%، $Z_\alpha = Z_{0.01} = 2.33$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :



اختبار الطرف الأيمن ، نلاحظ أن احصاءة الاختبار تقع يمين القيمة الجدولية $(2.88 > 2.33)$ أي أنها تقع في منطقة الرفض، ترفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل وهو ما يدل على عدم مصداقية الشركة.

مثال: إذا كانت نسبة مستعلي حزام الأمان في السيارات (قبل تشريع الزام الاستعمال)هي 0.8 ، درست عينة عشوائية حجمها 200 سائق بعد صدور تشريع الالزام فوجد أن 170 منهم يستعملون الحزام ، اختبر عند مستوى معنوية 0.05 ما إذا كان التشريع قد زاد نسبة المستعملين لحزام الامان.

الحل:

صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0: P = 0.8$$
$$H_1: P > 0.8$$

حساب احصاءة الاختبار:

$$\hat{P} = \frac{170}{200} = 0.85 \quad , \quad P_0 = 0.8$$

$$Z_C = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0.85 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{200}}} = 1.768$$

تحديد القيمة الجدولية:

عند مستوى معنوية 0.05, $Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.645$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :



اختبار الطرف الأيمن ، نلاحظ أن احصاءة الاختبار تقع يمين القيمة الجدولية $(1.768 > 1.645)$ أي أنها تقع في منطقة الرفض، نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل وهو ما يدل على أن التشريع قد زاد نسبة المستعملين لحزام الامان.

مثال: يدّعي مخترع عقار جديد أن أكثر من 80% ممن أخذوا العقار تماثلوا للشفاء من مرض معين بعد فترة زمنية معينة، وللتأكد من صحة ادعائه تم إعطاء العقار إلى عينة حجمها 180 مريض فأدى إلى شفاء 73% منهم ، فهل نتائج هذه العينة لا تدعم ادعاء صاحب العقار . مستوى المعنوية 5%.

الحل:

صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0: P = 0.8$$
$$H_1: P < 0.8$$

حساب احصاءة الاختبار:

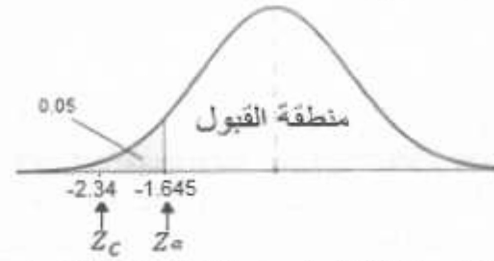
$$\widehat{P} = 0.73 \quad , \quad P_0 = 0.8 \quad , \; n = 180$$

$$Z_C = \frac{\widehat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0.73 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{180}}} = -2.34$$

تحديد القيمة الجدولية:

عند مستوى معنوية 0.05 (اختبار الطرف الأيسر)، $-Z_\alpha = -Z_{0.05} = -1.645$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :



اختبار الطرف الأيسر ،نلاحظ أن احصاءة الاختبار تقع يسار القيمة الجدولية $(-2.34 < -1.645)$ أي أنها تقع في منطقة الرفض ومن هنا يمكن القول أنه لا صحة لادعاء صاحب العقار.

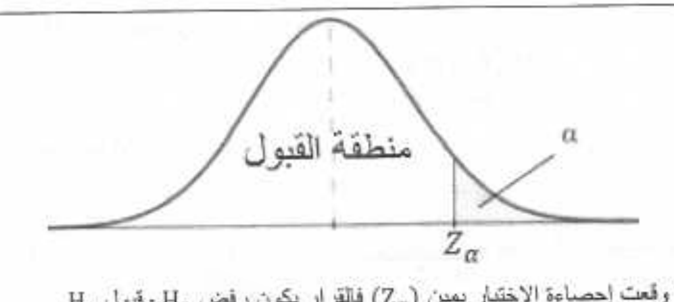
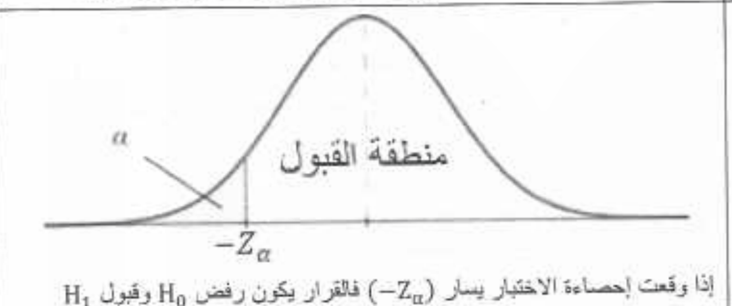
4. اختبارات الفروض حول الفرق بين نسبتي مجتمعين، احصاءة الاختبار هي:

$$Z_C = \frac{(\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n_1} + \frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n_2}}}$$

حيث: $\widehat{P}_1$ ، $\widehat{P}_2$ تمثل نسبة العينة من المجتمعين الأول والثاني على التوالي ، n_1 ، n_2 حجم العينتين ، $\widehat{P} = \frac{X+Y}{n_1+n_1}$

X ، Y هما عدد العناصر التي تحمل الصفة مدار البحث في عينتي المجتمع الأول والثاني على الترتيب.

الفرضية الاحصائية	القرار
1. اختبار من طرفين $H_0: P_1 = P_2$ $H_1: P_1 \neq P_2$	$\frac{\alpha}{2}$ منطقة القبول $\frac{\alpha}{2}$ $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ إذا وقعت إحصاءة الاختبار (Z_C) يمين $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ أو يسار $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1

<table>
<tr>
<td>2. اختبار من طرف واحد
$H_0: P_1 = P_2$
$H_1: P_1 > P_2$</td>
<td>
إذا وقعت إحصاءة الاختبار يمين (Z_α) فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1</td>
</tr>
<tr>
<td>3. اختبار من طرف واحد
$H_0: P_1 = P_2$
$H_1: P_1 < P_2$</td>
<td>
إذا وقعت إحصاءة الاختبار يسار $(-Z_\alpha)$ فالقرار يكون رفض H_0 وقبول H_1</td>
</tr>
</table>

مثال: مجموعتان أ و ب تتكون كل مجموعة من 100 شخص مصابين بمرض معين، أراد باحث اختبار مصل ضد هذا المرض فتم إعطاء المصل للمجموعة أ بينما المجموعة ب تم إعطائها العلاج المعتاد. وبعد فترة وجد أن 80 شخص من المجموعة أ قد شفي بينما شفي 62 شخص من المجموعة ب. اختبر الفرض القائل بأن المصل يساعد على الشفاء أكثر من العلاج المعتاد عند مستوى معنوية 5% .

الحل:

صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0: P_1 = P_2$$
$$H_0: P_1 > P_2$$

حساب احصاءة الاختبار:

$$Z_C = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_1} + \frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_2}}}$$

حيث:

$$\hat{P}_1 = \frac{X}{n_1} = \frac{80}{100} = 0.8$$
$$\hat{P}_2 = \frac{Y}{n_2} = \frac{62}{100} = 0.62$$
$$\hat{P} = \frac{X+Y}{n_1+n_1} = \frac{80+62}{200} = 0.71$$

$$Z_C = \frac{(0.8 - 0.62) - (0)}{\sqrt{\frac{0.71(1-0.71)}{100} + \frac{0.71(1-0.71)}{100}}} = 2.8$$

تحديد القيمة الجدولية:

عند مستوى معنوية 5%، $Z_\alpha = 1.645$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :



اختبار الطرف الأيمن ، نلاحظ أن احصاءة الاختبار تقع على يمين القيمة الجدولية ($1.645 < 2.8$) أي أنها تقع في منطقة الرفض، نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل الذي يدل على مدى فاعلية المصل.

مثال: يدعي صاحب مصنع "المستقبل" لإنتاج المصابيح الكهربائية أن نسبة التالف في إنتاجه أقل من نسبة التالف في إنتاج مصنع "الدقة" لإنتاج المصابيح الكهربائية ، أخذت عينة من كل مصنع وفحصت العينتان ، ويبين الجدول التالي نتائج الفحص:

	حجم العينة	عدد القطع التالفة
مصنع المستقبل	50	4
مصنع الدقة	100	5

اختبر فيما إذا كان انتاج صاحب مصنع "المستقبل" افضل من انتاج صاحب مصنع "الدقة" من حيث نسبة الإنتاج التالف وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل:

صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0: P_1 = P_2$$
$$H_0: P_1 < P_2$$

حساب احصاءة الاختبار:

$$Z_C = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_1} + \frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_2}}}$$

حيث:

$$\hat{P}_1 = \frac{4}{50} = 0.08$$
$$\hat{P}_2 = \frac{5}{100} = 0.05$$

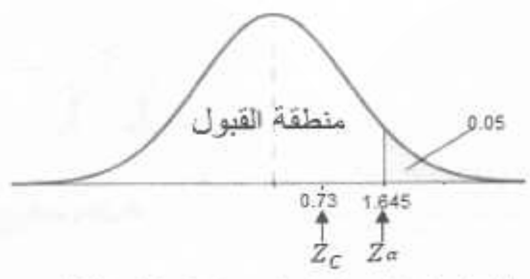
$$\hat{P} = \frac{X + Y}{n_1 + n_1} = \frac{4 + 5}{150} = 0.06$$

$$Z_C = \frac{(0.08 - 0.05) - (0)}{\sqrt{\frac{0.06(1 - 0.06)}{50} + \frac{0.06(1 - 0.06)}{100}}} = 0.73$$

تحديد القيمة الجدولية:

عند مستوى معنوية 0.05, $Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.645$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :



اختبار الطرف الأيمن ، نلاحظ أن احصاءة الاختبار تقع على يسار القيمة الجدولية ($0.73 < 1.645$) أي أنها تقع في منطقة القبول، نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل ،أي أنه ليس هناك فرق في نسبة المعاب في المصنعين.

مثال: مصنع لإنتاج أجهزة القياس الطبية يوجد به خطان لإنتاج نوع معين من أجهزة قياس ضغط الدم ، أخذت عينة عشوائية حجمها 200 جهاز من إنتاج الخط الاول ووجد أن 12 جهاز منها معيب، وأخذت عينة عشوائية من إنتاج الخط الثاني حجمها 300 جهاز فوجد أن بها 15 جهاز معيب.

1. اختبر الفرض القائل بأن هناك اختلاف في نسبة الأجهزة المعيبة المنتجة من الخطين، استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.
2. اختبر الفرض القائل بأن الخط الثاني يعمل بصورة أفضل من الخط الاول، استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

الحل:

1. اختبر الفرض القائل بأن هناك اختلاف في نسبة الأجهزة المعيبة المنتجة من الخطين:

صياغة الفرض الإحصائي:

فرض العدم $H_0: P_1 = P_2$

فرض البديل $H_1: P_1 \neq P_2$

حساب احصاءة الاختبار:

$$Z_C = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n1} + \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n2}}}$$

$$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{12}{200} = 0.06 \quad , \quad \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{15}{300} = 0.05 , \qquad \hat{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = 0.054$$

$$Z_C = \frac{(0.06 - 0.05) - 0}{\sqrt{\frac{0.054(1 - 0.054)}{200} + \frac{0.054(1 - 0.054)}{300}}} = 0.484$$

تحديد القيمة الجدولية:

مستوى معنوية 1% (α =0.01) واختبار طرفين اذا:$(Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.005} = 2.575)$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :



بمقارنة احصاءة الاختبار مع القيمة الجدولية نجد ان Z_C تقع في منطقة القبول (نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل)، أي أنه لا يوجد فرق معنوي في نسبة الأجهزة المعيبة المنتجة من الخطين.

2. اختبر الفرض القائل بأن الخط الثاني يعمل بصورة أفضل من الخط الاول(ويعني أن معيب الخط الأول أكبر من الثاني).

صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0: P_1 = P_2$$
$$H_1: P_1 > P_2$$

حساب احصاءة الاختبار:

$$Z_C = 0.484$$

تحديد القيمة الجدولية:

مستوى معنوية 5% (α =0.05) واختبار طرف واحد ، $(Z_{\alpha} = 1.645)$

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :

بمقارنة احصاءة الاختبار مع القيمة الجدولية نجد ان Z_C تقع في منطقة القبول (نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل). وهو ما لا يدل على أن الخط الثاني يعمل بصورة أفضل من الخط الأول.

****

تحديد القيمة الجدولية:

مستوى معنوية 1% ($\alpha = 0.01$) واختبار طرفين اذا:($Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.005} = 2.575$)

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :



بمقارنة احصاءة الاختبار مع القيمة الجدولية نجد ان Z_C تقع في منطقة القبول (نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل)، أي أنه لا يوجد فرق معنوي في نسبة الأجهزة المعيبة المنتجة من الخطين.

2. اختبر الفرض القائل بأن الخط الثاني يعمل بصورة أفضل من الخط الاول(ويعني أن معيب الخط الأول أكبر من الثاني).

صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0: P_1 = P_2$$
$$H_1: P_1 > P_2$$

حساب احصاءة الاختبار:

$$Z_C = 0.484$$

تحديد القيمة الجدولية:

مستوى معنوية 5% ($\alpha = 0.05$) واختبار طرف واحد ، ($Z_\alpha = 1.645$)

مقارنة القيمة الجدولية مع إحصاءة الاختبار :

بمقارنة احصاءة الاختبار مع القيمة الجدولية نجد ان Z_C تقع في منطقة القبول (نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل)، وهو ما لا يدل على أن الخط الثاني يعمل بصورة أفضل من الخط الأول.

****

الارتباط والانحدار

الارتباط الخطي البسيط :

يقيس قوة العلاقة بين متغيرين، وعادة ما تقاس بمعامل يسمى معامل ارتباط بيرسون ويرمز له بالرمز "r".

حيث:

$$r = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y}$$

حيث:

S_{XY} التباين المشترك أو التغاير للمتغيرين X و Y .

S_X و S_Y هما الانحراف المعياري لكل من X و Y .

$$S_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad , \quad S_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$$

$$r = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

او بصيغة أخرى:

$$r = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$

ملاحظة:

قيمة معامل الارتباط تنحصر بين (1-) و (1+) أي أن :

$$1 \leq r \leq -1$$

إذا كانت قيمة معامل الارتباط موجبة فهذا يعني أن نوع العلاقة طردية وإذا كانت سالبة فهذا يعني أنها عكسية ، إذا كانت قيمته تقترب من الواحد بغض النظر عن كونها موجبة او سالبة فهذا يعني أنها علاقة قوية ولو كانت تقترب من الصفر فهذا يعني أنها علاقة ضعيفة، وإذا كانت قيمته تساوي (1+) فهذا يعني أن العلاقة طردية تامة وإذا كانت تساوي (1-)فهذا يعني أن العلاقة عكسية تامة.

الانحدار الخطي البسيط:

معادلة انحدار Y على X المقدّرة :

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$$

حيث:

$$\hat{b} = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{S_{XY}}{S_X^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

مثال: للبيانات التالية:

4	2	5	1	3	X
5	4	6	2	3	Y

اوجد:

1. معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y .
2. نوع الارتباط بين المتغيرين X و Y ودرجة الارتباط.
3. أوجد معادلة انحدار Y على X التقديرية.
4. القيمة التقديرية ل Y عندما X تساوي 2.5.

الحل:

1. معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y :

$$r = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} r = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$

$$= \frac{(5)(69) - (15)(20)}{\sqrt{[(5)(55) - 225][(5)(90) - 400]}} = 0.9$$

2. نوع الارتباط بين المتغيرين X و Y ودرجة الارتباط :

نوع الارتباط طردي ودرجة الارتباط قوية

3. معادلة انحدار Y على X التقديرية:

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{(5)(69) - (15)(20)}{[(5)(55) - 225]} = 0.9$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{20}{5} = 4 \quad , \quad \bar{x} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 4 - (0.9 \times 3) = 1.3$$

$$\hat{Y} = 1.3 + 0.9X$$

4. عندما X تساوي 2.5 :

$$\hat{Y} = 1.3 + 0.9X = 1.3 + (0.9 \times 2.5) = 3.55$$

مثال:

الجدول التالي يبين الطول بالسنتيمتر (x) والوزن بالكيلوجرام (y) لمجموعة من الطلبة:

الطول(x)	150	155	160	165	168	170	172	170	169	175
الوزن(y)	58	62	63	66	70	68	73	75	80	76

حيث كان:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1654 \;, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 691 \;,$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 274144, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 48187 \,, \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 114726$$

اوجد:

1. نوع الارتباط بين ظاهرتي الطول والوزن ودرجته.
2. معادلة انحدار y على x التقديرية.
3. القيمة التقديرية لوزن طالب طوله 162 سم.

الحل:

1. نوع الارتباط ودرجته:

$$r = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} r = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$

$$= \frac{(10)(114726) - (1654)(691)}{\sqrt{[(10)(274144) - 2735716][(10)(48187) - 477481]}} = 0.867$$

أي أن نوع الارتباط طردي ودرجته قوية.

2. معادلة انحدار y على x التقديرية:

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{(10)(114726) - (1654)(691)}{[(10)(274144) - 2735716]} = 0.7592$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{691}{10} = 69.1 \quad , \quad \bar{x} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{1654}{10} = 165.4$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 69.1 - (0.76 \times 165.4) = -56.48$$

$$\hat{Y} = -56.48 + 0.7592X$$

3. القيمة التقديرية لوزن طالب طوله 162 سم:

$$\hat{Y} = -56.48 + 0.7592X = -56.48 + 0.7592 \times 162 = 66.52$$

****

حلول نماذج اختبارات

نموذج اختبار احصاء

<table>
<tr><td>1</td><td>

يرمز لاحتمال حدوث الحدث A بالرمز P(A) واحتمال عدم وقوع الحدث A بالرمز $P(A^C)$ حيث:

$[P(A^C)+P(A)]<1$ هل هذه العبارة صحيحة؟

الحل:

$[P(A^C)+P(A)]=1$ أي أن العبارة خاطئة .

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

إذا كان متوسط عدد إصابات العمل التي تحدث بين العاملين في أحد المستشفيات العامة هو 2 إصابة كل شهر ، فإنه خلال فترة شهر قادمة يكون احتمال وقوع إصابة عمل واحدة فقط في هذا المستشفى يساوي تقريبا ....

الحل: $\lambda = 2$

$$P(X=1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-2}2^1}{1!} = 0.27$$

</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

تم إجراء اختبار لقياس مستوى السكر في الدم لعينة مكونة من 8 مرضى فكانت نتيجة الاختبار كالتالي:

168 157 169 159 176 157 143 163

قيمة معامل الاختلاف لمستوى السكر في الدم لعينة المرضي يساوي ....

الحل:

$$C.V\% = \frac{S}{\overline{X}} \times 100\%$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{1292}{8} = 161.5$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{209358 - 8(161.5)^2}{8-1} = 100 \rightarrow S = 10$$

$$C.V\% = \frac{10}{161.5} \times 100\% = 6.1919\%$$

</td></tr>
<tr><td>4</td><td>

اذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد أجهزة قياس درجة الحرارة الموجودة بكل منزل داخل احدى المدن وكان توزيع الاحتمال للمتغير العشوائي X كما هو مبين في الجدول:

x	0	1	2
f(x)	0.75	0.20	0.05

فإذا كان $Z = X^2 - 2X + 1$ فإن قيمة E(Z) تساوي...................

وقيمة $E[X(X-1)]$ تساوي.......................

الحل:

$$E(Z) = E[X^2 - 2X + 1] = E[X^2] - 2E[X] + 1$$

$$E[X^2] = \sum_x x^2 f(x) = (0)^2(0.75) + (1)^2(0.20) + (2)^2(0.05) = 0.4$$

</td></tr>
</table>

$E[X]=\sum_{x} xf(x)=0(0.75)+1(0.20)+2(0.05)=0.3$ $E(Z)=0.4-2(0.3)+1=0.8$ $E[X(X-1)]=E[X^2]-E[X]=0.4-0.3=0.1$	
اذا كانت انحرافات خمس قيم عن متوسطها الحسابي هي كالتالي: d -1.8 -2.8 3.2 1.2 فإن قيمة العدد d تساوي .... **الحل:** مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفر، إذا: $1.2+3.2-2.8-1.8+d=0$ $d=0.2$	5
اذا كانت فترة حمل المرأة تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط 275 يوم وانحراف معياري σ ،فإذا كانت نسبة النساء اللاتي تدوم فترة حملهن لمدة تقل عن 285 يوم هي 97.72% فإن قيمة σ تساوي........... **الحل:** $P(X<285)=P\left(Z<\frac{285-275}{\sigma}\right)=0.9772$ من خلال جدول Z نجد أن: $\frac{285-275}{\sigma}=2\rightarrow\sigma=\frac{10}{2}=5$	6
تمتلك مصحة خاصة سيارتين للإسعاف، فإذا كان احتمال أن تكون سيارة الاسعاف الأولى جاهزة للعمل عند الحاجة إليها يساوي 0.99 واحتمال أن تكون سيارة الاسعاف الثانية جاهزة للعمل عند الحاجة إليها يساوي 0.98 فإن احتمال أن تكون سيارة الاسعاف الأولى غير جاهزة للعمل عند الحاجة إليها وسيارة الاسعاف الثانية غير جاهزة للعمل عند الحاجة إليها يساوي .... **الحل:** نرمز إلى احتمال أن تكون سيارة الاسعاف الأولى جاهزة للعمل عند الحاجة إليها بالرمز P(A) حيث P(A)=0.99 ، ونرمز إلى واحتمال أن تكون سيارة الاسعاف الثانية جاهزة للعمل عند الحاجة إليها بالرمز P(B) المطلوب هو $P(A'\cap B')$ حيث: $P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(A)*P(B)]$ $=0.0002$	7
اذا علمت أن 70% من طاقم التمريض العاملين بأحد المستشفيات العامة هم من العمالة الأجنبية. أخذت عينة عشوائية حجمها 6 أشخاص من بين طاقم التمريض العاملين بهذا المستشفى ، فإن احتمال وجود 4 أشخاص في العينة من العمالة الأجنبية يساوي تقريبا...................... **الحل:** نفرض أن نسبة طاقم التمريض من العمالة الأجنبية P حيث P=0.7 ، ونسبة العمالة المحلية q حيث q=0.3، والمتغير العشوائي x يرمز لعدد طاقم التمريض من العمالة الأجنبية	8

$P(X=4)=C_x^n p^x (q)^{n-x} = C_4^6 p^4 (q)^{6-4} = 0.324$	
اذا كان الانحراف المعياري لأعمار عينة من الأطفال قيست بالأشهر هو 6 أشهر فإن قيمة الانحراف المعياري إذا قيست الأعمار بالسنوات بدلا من الأشهر هو .... **الحل:** نصف سنة	9
لوحظ أنه خلال الفترة الصباحية يدخل الأشخاص المتبرعين بالدم إلى أحد مصارف الدم بمعدل 4 أشخاص كل ساعة،أثناء الفترة الصباحية نجد أن احتمال دخول على الأقل شخص واحد إلى هذا المصرف لغرض التبرع بالدم خلال نصف ساعة معينة يساوي تقريبا.................... **الحل:** ساعة ← $(\lambda=4)$ نصف ساعة ← $(\lambda=؟)$ $\lambda=\frac{0.5\times4}{1}=2$ $P(X\geq1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\left[\frac{e^{-2}2^0}{0!}\right]=0.8646$	10

البيانات التالية تبين عينة من الأطفال حديثي الولادة مقاسة بالأيام: 41 8 28 20 33 33 28 31 25 19 وسيط عمر الأطفال بالعينة يساوي....................... **الحل:** أولا نقوم بترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا 41 33 33 31 28 28 25 20 19 8 $X\left(\frac{n+1}{2}\right)=X\left(\frac{11}{2}\right)=X(5.5)=\frac{28+28}{2}=28$	11
إذا كانت نسبة الأشخاص المصابين بسرطان القولون في أحد المجتمعات هي 2% أخذت عينة عشوائية من هذا المجتمع حجمها 1500 شخص، فإن قيمة تباين عدد الأشخاص في العينة المصابين بسرطان القولون يساوي......................... **الحل:** نفرض أن نسبة الأشخاص المصابين بسرطان القولون P حيث P=0.02 ، ونسبة الاشخاص الغير مصابين بسرطان القولون q حيث q=0.98 . $V(X)=npq=1500*0.02*0.98=29.4$	12
مصنع يقوم بتصنيع نوع معين من أجهزة قياس حرارة الجسم يوجد به 3 خطوط إنتاج تقوم بانتاج هذا النوع من الأجهزة، فإذا كان خط الإنتاج الأول يساهم في إنتاج 60% من انتاج المصنع الكلي لهذا النوع من الأجهزة ، بينما الخط الثاني يساهم في إنتاج 20% من انتاج المصنع والثالث يساهم في إنتاج باقي انتاج المصنع. من سجلات المصنع تبين أن نسبة الأجهزة الصالحة للاستعمال المنتجة من كل خط هي 97% ، 98%، 99% على	13

	التوالي. فإذا سحب جهاز واحد عشوائيا من إنتاج هذا المصنع فإن احتمال أن يكون هذا الجهاز صالح للاستعمال يساوي تقريبا .... **الحل:** نفرض A تشير إلى حدث الإنتاج من الخط الأول حيث $P(A)=0.6$ نفرض B تشير إلى حدث الإنتاج من الخط الثاني حيث $P(B)=0.20$ نفرض C تشير إلى حدث الإنتاج من الخط الثالث حيث $P(C)=0.20$ M تشير إلى أن الجهاز صالح $P(M/A) = 0.97 \quad P(M/B) = 0.98 \quad P(M/C) = 0.99$ $P(M) = P(M/A)P(A) + P(M/B)P(B) + P(M/C)P(C)$ $P(M) = 0.97 \times 0.6 + 0.98 \times 0.20 + 0.99 \times 0.20 = 0.976$
14	متغير مستوى السكر في الدم لمريض (منخفض/معتدل/مرتفع) يصنف بأنه متغير نوعي ترتيبي. هل هذه العبارة صحيحة أو خاطئة؟ **الحل:** إجابة صحيحة
15	إذا كان معروفا بأن درجات الذكاء لأفراد المجتمعات تتوزع توزيعا طبيعيا متوسطه 105 درجة وتباينه 100 درجة . فإذا تم اختيار فردا واحدا عشوائيا من هذا المجتمع فإن احتمال أن تكون درجة ذكائه لا تقل عن 90 درجة ولا تزيد عن 120 درجة يساوي .... **الحل:** $P(90 < \bar{X} < 120) = P\left(\frac{90-105}{10/\sqrt{1}} < Z < \frac{120-105}{10/\sqrt{1}}\right) = P(-1.5 < Z < 1.5)$ ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي تكون قيمة الاحتمال 0.8664
16	إذا كان $x_1,x_2......x_{500}$ تمثل مشاهدات عينة حجمها 500 بحيث كان: $\sum_{i=1}^{500}(x_i - 7) = 0$ فإن قيمة المتوسط الحسابي لمشاهدات هذه العينة يساوي........... **الحل:** نعلم أن مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفرا وبالتالي قيمة المتوسط الحسابي تساوي 7
17	إذا كان X متغير عشوائي طبيعي بمعالم $\mu = 5$, $\sigma^2 = 25$ فإن قيمة $P(\|X\| \leq 5)$ تساوي .... **الحل:** $P(\|X\| \leq 5) = P(-5 \leq X \leq 5) = P(\frac{-5-5}{5} \leq Z \leq \frac{5-5}{5})$ $= P(-2 \leq Z \leq 0) = 0.4772$
18	تبين قيمة احتمال حدث معين درجة أو شدة الاعتقاد في حدوث الحدث، فكلما كان الحدث أكثر وقوعا كان الاحتمال أقرب إلى الصفر. هل هذه العبارة صحيحة أو خاطئة؟ .... **الحل:** خاطئة ، كلما كان الحدث أكثر وقوعا كان الاحتمال أقرب إلى الواحد.

نموذج اختبار احصاء:

1. عدد طرق توزيع 4 فنيين للعمل على 4 الات بمصنع علما بان كل الة تحتاج الى فني واحد لإدارتها هو ....   **الحل:** $^4P_4 = 24$
2. مكتب هندسي يعمل به 8 مهندسين و3 مساحين، يراد اختيار لجنة مكونة من 4 أشخاص من بين العاملين في هذا المكتب.عدد طرق اختيار هذه اللجنة بحيث يكون بها مهندس واحد على الأكثر هو..........   **الحل:** $^8C_1\ ^3C_3 = 8$
3. يوجد 10 تصاميم مختلفة لمدارس و5 تصاميم مختلفة لمستشفيات . عدد الطرق التي يتمكن بها أحد المهندسين من اختيار   تصميم واحد لمدرسة وتصميم واحد لمستشفى من بين هذه التصاميم هو...........   **الحل:** $^{10}C_1\ ^5C_1 = 50$
4. تم إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة، احتمال ظهور رقم أكبر من 5 على الوجه العلوي لزهرة النرد يساوي..   **الحل:**   فراغ العينة للتجربة هو (6،5،4،3،2،1) ، عدد العناصر 6 $P(X > 5) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$
5. تم إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة ، احتمال ظهور رقم 9 على الوجه العلوي لزهرة النرد يساوي.....   **الحل:**   الاحتمال يساوي صفر لأن الاحتمالات الممكنة هي (6،5،4،3،2،1)
6. إذا كان احتمال نجاح مهندس في إصلاح آلة معينة هو 0.91 فإن احتمال فشل المهندس في إصلاح نفس الآلة هو.........   **الحل:**   نفرض أن A حدث يشير إلى نجاح المهندس في إصلاح الآلة، حيث P(A)=0.91   فبالتالي A' يمثل حدث فشل المهندس في إصلاح الآلة أي أن : $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.91 = 0.09$
7. إذا كان C وD حدثين متنافيين وكان $P(C)=0.7$ و $P(D^C)=0.7$ فإن احتمال $P(C \cap D)$ يساوي ....   **الحل:**   طالما أن الحدثين متنافيين فلا يمكن أن يقعا معا في نفس الوقت أي أن $P(C \cap D) = 0$
8. إذا كان $P(A^C)=0.52$ و $P(B)=0.62$ و $P(A \cap B) = 0.10$ ، فإن $P(A/B)$ يساوي.......   **الحل:** $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.10}{0.62} = 0.1613$
9. إذا كان $P(A_1)=0.60$ و $P(A_2)=0.30$ و $P(A_1/A_2)=0.25$ فإن $P(A_2/A_1)$ يساوي.........   **الحل:** $P(A_1/A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \rightarrow P(A_1 \cap A_2) = 0.075$

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{0.075}{0.60} = 0.125$$

*إذا كان 89% من موظفي أحد المكاتب الهندسية هم من الذكوروكان 25% من موظفي هذا المكتب يقيمون خارج مدينة طرابلس، كما أنه تبين أن 15% من الموظفين العاملين بهذا المكتب هم من الذكور ويقيمون خارج مدينة طرابلس، فإذا تم اختيار موظف واحد عشوائيا من بين الموظفين العاملين بهذا المكتب فإن:

10. احتمال أن يكون الموظف المختار أنثى يساوي ....

الحل:

A حدث يشير إلى أن الموظف ذكر

B حدث يشير إلى ان الموظف يقيم خارج مدينة طرابلس

$$P(A) = 0.89\ ,\ P(B) = 0.25\ \ ,\ P(A \cap B) = 0.15$$

احتمال أن يكون الموظف المختار أنثى هو $P(A') = 1 - P(A) = 0.11$

11. احتمال أن يكون الموظف المختار ذكر وغير مقيم خارج مدينة طرابلس يساوي.......

الحل:

المطلوب هو $P(A \cap B')$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.89 - 0.15 = 0.74$$

12. احتمال أن يكون الموظف المختار ذكر علما بأنه مقيم خارج مدينة طرابلس يساوي...........

الحل:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.25} = 0.6$$

13. يوجد في مصنع مولدين للكهرباء، كل مولد مستقل في عمله عن المولد الأخر ،فإذا كان احتمال عدم اشتغال المولد الأول عند الحاجة إليه يساوي 0.001 واحتمال عدم اشتغال المولد الثاني عند الحاجة إليه يساوي 0.006 ، فإن احتمال اشتغال المولدين معا عند الحاجة إليهما يساوي..............

الحل:

A حدث يشير إلى عدم اشتغال المولد الأول عند الحاجة إليه حيث $P(A)=0.001$

B حدث يشير إلى عدم اشتغال المولد الثاني عند الحاجة إليه حيث $P(B)=0.006$

المطلوب هو: $P(A' \cap B')$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A) * P(B)]$$
$$= 1 - [0.006994] = 0.993$$

14. اذا كان $P(F/E)=0.2$ و $P(E/F)=0.3$ و $P(E)=0.3$ فإن $P(F)$ يساوي........

الحل:

لاحظ أن :

$$P(E/F) = P(E)$$

أي أن الحدثين E و F هما حدثان مستقلان وهذا يؤدي إلى أن :

$$P(F) = P(F/E) = 0.2$$

15. إذا كان G و H حدثان مستقلان بحيث كان $P(G \cup H) = 0.65$ و $P(H^C) = 0.6$ ، فإن $P(G)$ ......

الحل:

$$P(H) = 1 - P(H^C) = 0.4$$
$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G) * P(H)$$
$$P(G \cup H) = P(G)[1 - P(H)] + P(H)$$
$$P(G) = \frac{P(G \cup H) - P(H)}{1 - P(H)} = \frac{(0.65 - 0.4)}{(1 - 0.4)} = 0.4166$$

*في إحدى كليات الهندسة وجد أن 1% من الذكور و 4% من الإناث الدارسين بالكلية أعمارهم أكبر من 22 سنة وأن 60% من الدارسين بالكلية هم من الذكور. فإذا اختير شخص بطريقة عشوائية من بين الطلبة الدارسين بهذه الكلية فإن:

16. احتمال أن يكون عمره أكبر من 22 سنة يساوي...........

الحل:

A حدث يشير إلى ان الشخص من الذكور P(A)=0.60

B حدث يشير إلى ان الشخص من الإناث P(B)=0.40

M تشير الى أن الشخص عمره أكبر من 22 سنة

$$P(M/A) = 0.01 \quad , \quad P(M/B) = 0.04$$
$$P(M) = P(M/A)P(A) + P(M/B)P(B) = 0.01 \times 0.6 + 0.04 \times 0.4 = 0.022$$

17. أن يكون الشخص المختار ذكرا علما أن عمره أكبر من 22 سنة يساوي...........

الحل:

$$P(A/M) = \frac{P(M/A)P(A)}{P(M)} = \frac{0.01 \times 0.6}{0.022} = 0.272$$

18. إذا كان X متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال $f(x) = x^2/c \ , \ -5 < x < 5$ فإن c تساوي .....

الحل:

$$\int_{-5}^{5} \frac{x^2}{c} = 1 \rightarrow \frac{1}{c}\frac{x^3}{3}\Big|_{-5}^{5} = 1 \rightarrow c = 83.33$$

19. إذا كان Z متغير عشوائي متصل بحيث كان $\mu_Z = E(Z) = 0.4$ ، $E(Z^2)=0.9$ فإن $E[Z(Z-1)]$........

الحل:

$$E[Z(Z-1)]= E(Z^2)-E(Z)=0.9-0.4=0.5$$

20. إذا كان X متغير عشوائي متصل بحيث كان $P(X \geq 3) = 0.9276$ فإن قيمة $P(X < 3)$ هي.........

الحل:

$$P(X < 3) = 1 - P(X \geq 3) = 0.0724$$

21. إذا كان X متغير عشوائي له دالة كتلة الاحتمال المعطاة بالجدول التالي:

x	-1	0	1	2
f(x)	0.1	0.6	0.2	0.1

فإن قيمة $P(-1 < X \leq 1)$ تساوي.............

الحل:

$$P(-1 < X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.6 + 0.2 = 0.8$$

22. إذا كان الزمن اللازم لكي يكمل طالب امتحان مدته ساعة واحدة هي متغير عشوائي X بدالة كثافة احتمال معطاة كالتالي:

$f(x)=3x^2 \quad , \quad 0<x<1$ فإن قيمة $P(X \leq 0.35)$ تساوي............

الحل:

$$P(X \leq 0.35) = P(-\infty < X \leq 0.35) = \int_{-\infty}^{0.35} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{0.35} 3x^2dx$$

$$= 0 + x^3|_0^{0.35} = 0.0428$$

23. إذا كانت نسبة المهندسين المعماريين في احد المجتمعات الإنسانية هي 0.04% أخذت عينة عشوائية من هذا المجتمع حجمها 40000 شخص. فإن العدد المتوقع للمهندسين المعماريين في العينة هو ....

الحل:

$$E(X) = \mu = np = 40000 \times 0.0004 = 16$$

24. إذا كانت نسبة الوحدات المعيبة من إنتاج إحدى الألات هي 15% ، أخذت عينة عشوائية حجمها 4 وحدات من إنتاج هذه الألة ، فإن احتمال أن يوجد بهذه العينة وحدة معيبة واحدة على الأقل يساوي........

الحل:

$$P = 0.15 \,, q = 0.85 \,\,, n = 4$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_0^4(0.15)^0(0.85)^{4-0} = 1 - 0.522 = 0.478$$

25. إذا كانت دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي X معطاة كالتالي:

$$f(x) = P(X = x) = C_x^{200}(0.35)^x(0.65)^{200-x} \;; x = 0,1,2 \dots\dots\dots .200$$

حيث:

$$C_x^{200} = \frac{200!}{x!\,(200-x)!}$$

فإن تباين المتغير العشوائي X يساوي.............

الحل:

$$P = 0.35 \,, q = 0.65 \,\,, n = 200$$

$$V(X) = npq = 200 * 0.35 * 0.65 = 45.5$$

نموذج اختبار احصاء :

1. إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 3 وتباين 10 فإن $P(X=4)$ يساوي

A	1	V	0	Z	0.3456	T	0.4602
E	0.9500	X	0.0250	W	0.9750	O	0.8715

الحل:

$$P(X = 4) = 0$$

2. إذا كان Z متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 0 وتباين 1 بحيث كان $P(Z<C)=0.6915$ فإن قيمة C تساوي:

A	1.5	V	0.5	Z	-1.5	T	-0.25

0.8715	O	0.25	W	-0.5	X	1.3	E

الحل:

من خلال جدول التوزيع الطبيعي $C = 0.5$

3. إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين 100 وكان $P(X \le 40) = 0.6915$ فإن قيمة μ تساوي

35	T	25	Z	15	V	10	A
	O	100	W	40	X	55	E

الحل:

$$P(X \le 40) = P\left(Z \le \frac{40 - \mu}{10}\right) = 0.6915$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$\frac{40 - \mu}{10} = 0.5 \rightarrow \mu = 35$$

4. إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 40 وانحراف معياري يساوي 5 فإن $P(35 < X < 45)$ يساوي

0.7250	T	0.3456	Z	0.8413	V	0.6923	A
0.4000	O	0.6826	W	0.5000	X	0.1587	E

الحل:

$$P(35 < X < 45) = P\left(\frac{35 - 40}{5} < Z < \frac{45 - 40}{5}\right) = P(-1 < Z < 1) = 0.6826$$

5. مجتمع متكون من 10000 شخص أعمارهم تتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط 40 سنة وبانحراف معياري قدره 5 سنوات فإن عدد الأشخاص الذين أعمارهم تتراوح ما بين 35 إلى 45 سنة يساوي

4000	T	5000	Z	1587	V	6826	A
7250	O	6923	W	3456	X	8413	E

الحل:

من الفقرة السابقة، عدد الأشخاص يساوي $10000*0.6826 = 6826$ شخص

6. إذا كان المتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ فإن قيمة $P(Z<0.5)$ تساوي

0.6915	T	0.0250	Z	0.5	V	0.3085	A
0.0183	O	0	W	0.6179	X	0.4602	E

الحل:

من خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن:

$$P(Z < 0.5) = 0.6915$$

7. إذا كان المتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ فإن قيمة K بحيث يكون $P(0.5 < Z < K) = 0.2117$ تساوي

3.1	T	2.4	Z	3.4	V	1.1	A
0	O	2.9	W	2.6	X	1.3	E

الحل:

$$P(0.5 < Z < K) = P(Z < K) - P(Z < 0.5) = 0.2117$$

$$P(Z < K) = P(Z < 0.5) + 0.2117 = 0.6915 + 0.2117 = 0.9032$$

وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي نجد أن K=1.3

8. إذا كان X متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases}$$

فإن $E(X)$ تساوي

0.7	T	0.3	Z	0.25	V	0.2	A
0.4	O	0	W	1	X	0.5	E

الحل:

$$E(X) = \int_0^1 x * 6x(1-x)\,dx = \int_0^1 (6x^2 - 6x^3)\,dx = 2x^3|_0^1 - \frac{3}{2}x^4|_0^1 = 0.5$$

9. باستخدام معلومات السؤال السابق نجد أن $P(X \geq 1)$ تساوي

0.7	T	0.5	Z	1	V	0.2	A
0.4 0	O	0.3	W	0	X	0.25	E

الحل:

$$P(X \geq 1) = P(1 \leq X < \infty) = 0$$

10. فيما يلي توزيع الاحتمال للمتغير العشوائي المنفصل T الذي يمثل عدد أجهزة النقال التي يمتلكها طالب تم اختياره عشوائيا من بين طلبة جامعة طرابلس

t	1	2	3	4
P(T=t)	0.75	0.22	0.02	0.01

فإن $P(1 < T \leq 3)$ تساوي

0	T	0.02	Z	0.22	V	0.01	A
1	O	0.99	W	0.24	X	0.97	E

الحل:

$$P(1 < T \leq 3) = P(T = 2) + P(T = 3) = 0.22 + 0.02 = 0.24$$

11. فيما يلي توزيع الاحتمال للمتغير العشوائيY الذي يمثل عدد إصابات العمل اليومية بين عمال احد المصانع خلال سنة 2014

y	0	1	2	3
f(Y=y)	0.7	0.25	0.04	0.01

فإن قيمة $E[3Y-0.5]$ تساوي

0.49	T	0.76	Z	0.23	V	0.58	A
0.88	O	0.19	W	0.52	X	0.34	E

الحل:

$$E[3Y - 0.5] = 3E(Y) - 0.5$$

$$E(Y) = 0 * 0.7 + 1 * 0.25 + 2 * 0.04 + 3 * 0.01 = 0.36$$

$$E[3Y - 0.5] = 3 * 0.36 - 0.5 = 0.58$$

12. باستخدام معلومات السؤال رقم 11 السابق نجد أن $P(Y \geq 3)$ يساوي

A	0	V	0.04	Z	0.7	T	0.01
E	0.05	X	0.75	W	0.3	O	1

الحل:

$$P(Y \geq 3) = P(Y = 3) = 0.01$$

13. إذا كان W متغير عشوائي متصل بحيث كان $E[W]=20$ و $E[W^2]=409$ فإن قيمة الانحراف المعياري للمتغير العشوائي W يساوي

A	9	V	16	Z	$\sqrt{20}$	T	2
E	4	X	389	W	3	O	1

الحل:

$$\sigma_w = \sqrt{E[w^2] - [E(w)]^2} = \sqrt{409 - 400} = 3$$

14. إذا كان X متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4(1+x)}{54} & \text{if } 2 < x < 5 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases}$$

فإن $P(2 < X \leq 5)$ تساوي

A	0.2	V	1	Z	0.3	T	0
E	0.25	X	0.5	W	0.4	O	0.7

الحل:

$$P(2 < X \leq 5) = \int_2^5 \frac{4(1+x)}{54} dx = \int_2^5 \frac{4}{54} dx + \int_2^5 \frac{4x}{54} dx = \frac{4}{54} x|_2^5 + \frac{1}{27} x^2|_2^5 = 1$$

15. مصنع به 3 خطوط إنتاج A,B,C بحيث كان الخط A ينتج 40% من الإنتاج الكلي للمصنع، والخط B ينتج 50% من الإنتاج الكلي للمصنع، والخط C ينتج 10% من الإنتاج الكلي للمصنع، وكانت نسبة الإنتاج المعيب للخطوط الثلاثة على الترتيب هي 2%، 4%، 1% فإذا اختيرت وحدة واحدة من الإنتاج بشكل عشوائي ، فإن احتمال ان تكون الوحدة المسحوبة سليمة يساوي

A	1	V	0	Z	0.07	T	0.971
E	0.93	X	0.135	W	0.865	O	0.029

الحل:

$$P(A) = 0.40 \ , P(B) = 0.50 \ \ , P(C) = 0.10$$

M حدث يشير إلى أن الوحدة المسحوبة سليمة

D حدث يشير إلى أن الوحدة المسحوبة معابة

$$P(D/A) = 0.02 \ , \quad P(D/B) = 0.04 \ , \ P(D/C) = 0.01$$

$$P(M/A) = 1 - 0.02 = 0.98 \quad P(M/B) = 1 - 0.04 = 0.96 \quad P(M/C) = 1 - 0.01 = 0.99$$

$$P(M) = P(M/A) \times P(A) + P(M/B) \times P(B) + P(M/C) \times P(C) = 0.971$$

16. إذا كان $P(A)=0.2$ و $P(B)=0.3$ و $P(A/B)=0.4$ فإن قيمة $P(A\cap B)$ يساوي

A	0.2	V	0.3	Z	0.5	T	0.8
E	0.12	X	0.4	W	0.7	O	0.6

الحل:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\rightarrow P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)=0.12$$

17. باستخدام معلومات السؤال رقم 16 نجد أن قيمة $P(A\cup B)$ تساوي

A	0	V	0.38	Z	0.18	T	0.55
E	0.5	X	0.44	W	0.6	O	0.32

الحل:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.38$$

18. يوجد في مصنع مولدين للكهرباء، كل مولد مستقل في عمله عن الأخر، فإذا كان احتمال عدم اشتغال المولد الأول عند انقطاع التيار الكهربائي يساوي 0.03 واحتمال عدم اشتغال المولد الثاني عند انقطاع التيار الكهربائي يساوي 0.04 فإنه في حالة انقطاع التيار الكهربائي يكون احتمال عدم اشتغال المولد الأول علما بأن المولد الثاني لم يشتغل أيضا هو

A	0.03	V	0.97	Z	0.9312	T	0
E	0.04	X	0.0012	W	0.96	O	1

الحل:

A حدث عدم اشتغال المولد الأول عند انقطاع التيار الكهربائي حيث $P(A)=0.03$

B حدث عدم اشتغال المولد اللثاني عند انقطاع التيار الكهربائي حيث $P(B)=0.04$

المطلوب هو $P(A/B)$

الحدثين مستقلين يؤدي ذلك إلى أن : $P(A/B)=P(A)=0.03$

19. باستخدام معلومات السؤال رقم 18 نجد أنه في حالة انقطاع التيار الكهربائي يكون احتمال عدم اشتغال المولد الأول وعدم اشتغال المولد الثاني يساوي

A	0.03	V	0.97	Z	0.0012	T	0
E	0.04	X	0.96	W	0.9312	O	1

الحل:

$$P(A\cap B)=P(A)*P(B)=0.03*0.04=0.0012$$

20. اذا كان احتمال نجاح مهندس في الحصول على درجة الماجستير في مجال الإدارة الهندسية هو 0.93 فإن احتمال فشله في الحصول على الماجستير في الإدارة الهندسية يساوي

A	0.02	V	0.05	Z	0.7	T	0
E	0.97	X	0.39	W	0.07	O	1

الحل:

A حدث نجاحه $P(A)=0.93$ ، احتمال فشله هو الحدث المكمل للحدث A أي A^C

$$P(A^C)=1-P(A)=0.07$$

21. إذا كان A و B حدثان معرفان على فراغ عينة S وكان $P(B) = W$ و $P(A \cup B) = 0.7$ و $P(A)=0.4$ فإن قيمة W عندما يكون A و B حدثان متنافيان تساوي

A	0.1	V	0.25	Z	0.2	T	0
E	0.15	X	0.7	W	0.6	O	0.3

الحل:

عندما يكون الحدثان متنافيان $P(A \cap B) = 0$ وبالتالي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(P) \rightarrow 0.7 = 0.4 + W \rightarrow W = 0.3$$

22. إذا تم اختيار شخص ما عشوائيا وجعلنا A ترمز إلى أن الشخص المختار يحمل بكالوريس هندسة و B ترمز لحدث أن الشخص المختار يعمل في القطاع الخاص و $A \cap B$ ترمز إلى حدث أن الشخص المختار يحمل بكالوريس هندسة ويعمل في القطاع الخاص فإذا علمت أن $P(A)=0.2$ و $P(B)=0.53$ و $P(A \cap B) = 0.08$ فإن احتمال أن يكون الشخص المختار يحمل بكالوريس هندسة ولا يعمل في القطاع الخاص يساوي

A	0.47	V	0.106	Z	0.2	T	0 .12
E	0.4	X	0.45	W	0.65	O	0.15

الحل:

$$P(A) = 0.2 \quad , \quad P(B) = 0.53 \quad , \quad P(A \cap B) = 0.08$$

المطلوب هو: $P(A \cap B')$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.2 - 0.08 = 0.12$$

23. باستخدام معلومات السؤال 22 فإن احتمال أن يكون الشخص المختار يعمل في القطاع الخاص علما أنه يحمل بكالوريس هندسة يساوي

A	0.42	V	0.03774	Z	0. 08	T	0.12
E	0.2	X	0.4	W	0.6	O	0.05

الحل:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4$$

24. بينت سجلات الشرطة في إحدى المدن الكبيرة أن نسبة السيارات في المدينة التي يوجد بها صندوق الإسعافات الأولية هي 50% ، أخذت عينة عشوائية حجمها 484 سيارة من بين السيارات التي في هذه المدينة ، إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد السيارات في العينة التي يوجد بها صندوق الإسعافات الاولية فإن الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X يساوي

A	15.5563	V	81	Z	12	T	242
E	144	X	121	W	9	O	11

الحل:

$$P = 0.50 \;,\; q = 0.50 \quad , \quad n = 484$$

$$\sigma = \sqrt{nPq} = \sqrt{(484 * 0.50 * 0.50)} = 11$$

25. إذا كان X متغير عشوائي له دالة كتلة الاحتمال التالية:

$$P(X = x) = \frac{40!}{x!\,(40 - x)!}(0.9)^x(0.1)^{40-x} \quad ; x = 0,1,2 \dots \dots 40$$

فإن $P(X=40)$ يساوي

A	0.98522	V	0.01478	Z	0.87152	T	0.93128
E	0.54105	X	001952	W	0.06889	O	0.12855

الحل:

$$P = 0.9\ ,\ q = 0.1\quad ,\ n = 40$$

$$P(X = 40) = C_{40}^{40}(0.9)^{40}(0.1)^{40-40} = 0.01478$$

26. باستخدام معلومات السؤال رقم 25 نجد أن $P(X \le 39)$ يساوي

A	0.98522	V	0.01478	Z	0.87152	T	0.93128
E	0.54105	X	001952	W	0.06889	O	0.12855

الحل:

$$P(X \le 39) = 1 - P(X = 40) = 1 - 0.01478 = 0.9852$$

27. بينت دراسة صحية حديثة أن نسبة العمال المصابين بمرض الربو من بين العاملين في مصنع الاسمنت في دولة ما هي 2% ، إذا سحبت عينة عشوائية حجمها 1500 شخص من العاملين في هذه المصانع فإن العدد المتوقع للعمال المصابين بمرض الربو في هذه العينة هو

A	300	V	300	Z	1470	T	49
E	16	X	30	W	25	O	64

الحل:

$$P = 0.02\ ,\ q = 0.98\quad ,\ n = 1500$$

$$E(X) = nP = 1500 \times 0.02 = 30$$

28. إذا علمت أن 75% من الدارسين في إحدى الجامعات هم من الذكور ، أخذت عينة عشوائية حجمها 30 شخص من بين الدارسين في هذه الجامعة فإن احتمال وجود 8 إناث في هذه العينة يساوي

A	0	V	0.8765	Z	0.1593	T	0.1623
E	0.1215	X	0.1045	W	0.7525	O	0.1145

الحل:

P = 0.25(نسبة الإناث) , q = 0.75(نسبة الذكور) , n = 30

$$P(X = 8) = C_{8}^{30}(0.25)^{8}(0.75)^{30-8} = 0.1593$$

29. عدد عناصر فراغ العينة لتجربة قذف قطعة نقود معدنية 5 مرات متتالية يساوي

A	10	V	3125	Z	32	T	8
E	25	X	5	W	160	O	16

الحل:

عدد عناصر فراغ العينة يساوي $(2^5 = 32)$

30. يراد اختيار وفد مكون من 3 أشخاص من بين 7 عمال 4 مساحين و 3 مهندسيين، عدد طرق اختيار الوفد هو

A	2184	V	36	Z	364	T	48
E	112	X	147	W	84	O	63

$${}^{14}C_3 = 364$$

31. قيمة المقدار $\frac{10!}{3!4!2!}$ تساوي

0.4160	T	1320	Z	220	V	100	A
12600	O	151200	W	520	X	20240	E

الحل:

يساوي 12600

32. قيمة المقدار $\frac{7!}{(7-3)!}$ تساوي

1.75	T	200	Z	100	V	210	A
7	O	150	W	28	X	320	E

الحل:

يساوي 210

33. عدد الطرق التي يمكن بها توزيع 5 عمال للاشتغال على 5 الات بحيث كل عامل يشتغل على الة واحدة فقط هو

16	T	5	Z	25	V	3125	A
120	O	20	W	1	X	10	E

الحل:

$${}^{5}P_{5} = 120$$

34. يراد اختيار لجنة مكونة من 3 أشخاص من بين 7 عمال و 4 مساحين و 3 مهندسيين لإنجاز عمل معين، عدد طرق اختيار هذه اللجنة بحيث يكون باللجنة عامل واحد ومساح واحد ومهندس واحد يساوي

63	T	147	Z	364	V	2184	A
48	O	36	W	84	X	112	E

الحل:

$${}^{7}C_{1}\ {}^{4}C_{1}\ {}^{3}C_{1} = 84$$

35. عدد المترددين على أحد الحقول النفطية خلال الفترة الصباحية من الساعة 9 إلى الساعة 10 يوميا هو متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمتوسط يساوي 3أشخاص ،في صباح أحد الأيام خلال الفترة من الساعة 9 إلى 10 صباحا احتمال وصول أقل من 3 أشخاص إلى عيادة هذا الحقل النفطي يساوي

0 .45668	T	0.12347	Z	0.88145	V	0.53215	A
0.42319	O	0.68995	W	0.40450	X	0.55125	E

الحل:

$$\lambda = 3$$

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \left[\frac{e^{-3}3^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}3^{1}}{1!} + \frac{e^{-3}3^{2}}{2!}\right]$$

$$= 0.42319$$

36. بينت سجلات شرطة المرور بأن معدل حوادث السيارات التي تقع على طريق صحراوي هو 2.1 حادث أسبوعيا ، العدد المتوقع للحوادث التي ستقع على هذا الطريق الصحراوي خلال 10 أيام هو

$\sqrt{3}$	T	3	Z	2.1	V	21	A
1	O	7	W	9	X	6.1	E

الحل:

7أيام ← (λ=2.1)

10 أيام ←(λ=?)

$$E(X) = \lambda = \frac{(10 * 2.1)}{7} = 3$$

37. باستخدام معلومات السؤال رقم 36 نجد أن قيمة الانحراف المعياري لعدد حوادث السيارات التي تقع على هذا الطريق الصحراوي خلال فترة 10 ايام هو

A	21	V	3	Z	9	T	7
E	6.1	X	2.1	W	$\sqrt{3}$	O	1

الحل:

$$\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3}$$

38. إذا كان X متغير عشوائي له دالة كتلة الاحتمال التالية:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; x = 0,1,2 \ldots\ldots, \quad \lambda > 0$$

فإذا علمت أن $P(X = 1) = 3P(X = 0)$ فأوجد قيمة λ

A	0	V	2	Z	4	T	3
E	1	X	5	W	6	O	7

الحل:

$$P(X = 1) = 3P(X = 0) \rightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^{1}}{1!} = 3\frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!} \rightarrow \lambda = 3$$

39. باستخدام معلومات السؤال رقم 38 نجد أن قيمة التباين للمتغير العشوائي X تساوي

A	2	V	6	Z	1	T	0
E	3	X	5	W	4	O	7

الحل:

$$V(X) = \lambda = 3$$

40. إذا كان X متغير عشوائي منفصل له توزيع بواسون بمتوسط يساوي 3.99 وانحراف معياري يساوي 1.9975 فإن $P(X \geq 1)$ يساوي

A	0.8895	V	0.9815	Z	0. 1105	T	0 .8643
E	0.3515	X	0.6385	W	0.0185	O	0.1357

الحل:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-3.99}3.99^{0}}{0!} = 0.9815$$

نموذج اختبار احصاء:

1. إذا كان A,B حدثان معرفان على فراغ عينة S بحيث كان P(A)=0.5 و P(B/A)=0.2 فإن قيمة $P(A' \cup B')$ تساوي..........

الحل:

$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) * P(B/A) = 1 - (0.5 \times 0.2) = 0.9$$

2. إذا كان $P(A) = 0.425$ و $P(B') = 0.775$ و $P(B'/A) = 0.625$ فإن $P(B/A)$ يساوي..

الحل:

$$P(B'/A) = 1 - P(B/A) \rightarrow P(B/A) = 1 - 0.625 = 0.375$$

❖ توضح سجلات الشرطة في مدينة معينة بأن 60% من حوادث السيارات تقع بسبب السرعة العالية، وأن 5% منها تقع بسبب وجود خلل ميكانيكي بالسيارة، وان 30% من الحوادث تقع بسبب نعاس قائد السيارة أثناء القيادة الليلية وأن 5% منها تقع لأسباب أخرى. ومن خلال تقديرات الخبراء فإن احتمال حدوث حادث سيارة قاتل عند توفر أحد الأسباب السابقة هو على الترتيب: 0.5، 0.3، 0.95 و 0.05

3. احتمال حدوث حادث سيارة في هذه المدينة يكون غير قاتل يساوي...............

الحل:

A حدث حدوث حادث سيارة قاتل بسبب السرعة العالية حيث P(A)=0.60

B حدث حدوث حادث سيارة قاتل بسبب خلل ميكانيكي بالسيارة حيث P(B)=0.05

C حدث حدوث حادث سيارة قاتل بسبب النعاس حيث P(C)=0.30

D حدث حدوث حادث سيارة قاتل لأسباب أخري حيث P(D)=0.05

F حدث حدوث حادث سيارة قاتل

M حدث حدوث حادث سيارة غير قاتل

$$P(F/A) = 0.5\,, P(F/B) = 0.3\,\,, P(F/C) = 0.95\,, P(F/D) = 0.05$$
$$P(M/A) = 1 - 0.5 = 0.5\,, P(M/B) = 1 - 0.3 = 0.7,$$
$$P(M/C) = 1 - 0.95 = 0.05\,, P(M/D) = 1 - 0.05 = 0.95$$
$$P(M) = P(M/A) * P(A) + P(M/B) * P(B) + P(M/C) * P(C) + P(M/D) * P(D)$$
$$P(M) = 0.3975$$

4. إذا علمت بأنه قد وقع حادث سيارة قاتل، فإن احتمال أن يكون سبب هذا الحادث هو السرعة العالية يساوي تقريبا...............

الحل:

$$P(A/F) = \frac{P(F/A) * P(A)}{P(F)} = \frac{P(F/A) * P(A)}{1 - P(M)} = \frac{(0.5 \times 0.60)}{0.6025} = 0.4979$$

5. إذا كان توزيع الاحتمال للمتغير العشوائي Y الذي يمثل عدد الأطفال لكل مهندس من مهندسي مصنع الحديد والصلب هو حسب الجدول التالي:

y	0	1	2	3	4	5	6
P(Y=y)	0.13	0.26	0.27	0.19	0.10	0.04	0.01

فإن قيمة تباين المتغير العشوائي Y تساوي.............

الحل:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i f(y_i)$$
$$= (0)(0.13) + (1)(0.26) + (2)(0.27) + (3)(0.19) + (4)(0.10) + (5)(0.04) + (6)(0.01) = 2.03$$

$$E(Y^2) = \sum_Y y^2 f(y)$$

$$= (0)^2(0.13) + (1)^2(0.26) + (2)^2(0.27) + (3)^2(0.19) + (4)^2(0.10) + (5)^2(0.04) + (6)^2(0.01) = 6.01$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 = 6.01 - 2.03^2 = 1.8891$$

6. إذا كان Z متغير عشوائي متصل متوسطه $\mu = 30$ وتباينه $\sigma^2 = 16$ فإن $P(Z = 30)$ تساوي.......

الحل:

$$P(Z = 30) = 0$$

7. إذا كان X متغير عشوائي متصل له دالة كثافة الاحتمال التالية:

$f(x) = k\sqrt{x} \quad ; 0 < x < 1$ فإن قيمة العدد الثابت k تساوي..............

الحل:

$$\int_0^1 k\sqrt{x} = 1 \rightarrow \frac{k}{1.5} x^{1.5}|_0^1 = 1 \rightarrow k = 1.5$$

8. إذا علمت بأن 20% من المهندسين العاملين بإحدى شركات البناء هم من العمالة الأجنبية ، أخذت عينة عشوائية حجمها 10 أشخاص من بين جميع المهندسين العاملين بهذه الشركة. احتمال أن يكون بالعينة 3 أشخاص على الأقل من العمالة الأجنبية يساوي تقريبا..............

الحل:

$$P = 0.20\ ,\ q = 0.80\quad ,\ n = 10$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$1 - [C_0^{10}(0.20)^0(0.80)^{10-0} + C_1^{10}(0.20)^1(0.80)^{10-1} + C_2^{10}(0.2)^2(0.8)^{10-2}]$$

$$= 1 - 0.67779 = 0.3222$$

9. إذا كان عدد العمال الذين يصابون بالتلوث في مصنع للمواد الكيميائية في فترة أسبوع واحد متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمتوسط 1.5 عامل. احتمال إصابة عامل واحد على الأكثر في فترة أسبوعين قادمين يساوي تقريبا...........

الحل:

أسبوع ← (λ=1.5)

أسبوعين ←(λ=?)

$$\lambda = \frac{(2 \times 1.5)}{1} = 3$$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} = 0.199$$

10. إذا كانت أوزان أكياس معبأة بمادة كيميائية يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ كيلوجرام للكيس الواحد وانحراف معياري 5 كيلوجرام، فإذا كانت نسبة الأكياس التي يزيد وزنها عن 12 كجم هي 84.13% فإن قيمة μ تساوي..................

الحل:

$$P(X > 12) = P\left(Z > \frac{12-\mu}{5}\right) = 0.8413$$

$$\left(Z < \frac{12-\mu}{5}\right) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$\frac{12-\mu}{5} = -1 \rightarrow \mu = 12 + 5 = 17$$

11. إذا كان الزمن اللازم لإنجاز عمل هندسي معين بأحد المكاتب الهندسية يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 60 دقيقة وانحراف معياري 5 دقائق، فإذا سجل زمن انجاز هذا النوع من الأعمال الهندسية لعينة عشوائية حجمها 100 عمل ، فإن احتمال أن يكون الزمن المستغرق لإنجاز هذا العمل الهندسي لهذه العينة لا يقل عن 59 دقيقة ولا يزيد عن 61 دقيقة هو...................

الحل:

$$P(59 < \bar{X} < 61) = P\left(\frac{59-60}{\left(\frac{5}{10}\right)} < Z < \frac{61-60}{\left(\frac{5}{10}\right)}\right) = P(-2 < Z < 2) = 0.9544$$

12. البيانات التالية تبين أوزان 5 صناديق بالكيلوجرام تحتوي على مادة كيميائية تم سحبها من أحد مخازن المصنع الذي يقوم بتصنيع هذه المادة 41.0 40.5 38.1 39.7 39.7 على افتراض أن أوزان الصناديق الموجودة بالمخزن تتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ ، تم حساب كل من قيمة المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للعينة فكانت كالتالي: $[S = 1.1\ ,\ \bar{x} = 39.8]$ ،فترة ثقة 95% حول μ هي .....

الحل:

تباين المجتمع σ^2 مجهول وكانت $n < 30$ فإن:

$100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة حول المتوسط μ هي:

$$\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1} < \mu < \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \quad , \quad \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{0.025,4} = 2.776$$

$$39.8 - \frac{1.1}{\sqrt{5}}(2.776) < \mu < 39.8 + \frac{1.1}{\sqrt{5}}(2.776)$$

$$38.43 < \mu < 41.165$$

- أخذت عينة عشوائية مكونة من 16 موظف من العاملين بأحد المصانع الكبيرة وتبين بأن متوسط مرتباتهم الشهرية هو 1500 دينار بانحراف معياري قدره 50 دينار ، على افتراض أن مرتبات الموظفين بالمصنع لها توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 ، لاختبار فرض العدم $H_0: \mu = 1450$ ضد الفرض البديل $H_1: \mu > 1450$ مستخدما مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ فإن:

13. قيمة احصاءة الاختبار تساوي...................

الحل:

تباين المجتمع σ^2 مجهول و $n < 30$ فإن احصاءة الاختبار:

$$T_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1500 - 1450}{\frac{50}{\sqrt{16}}} = 4$$

14. القيمة الحرجة(القيمة الجدولية) التي تفصل بين منطقة عدم رفض H_0 ومنطقة رفض H_0 هي............

الحل:

$$\alpha = 0.05$$

$$t_{\alpha,n-1} = t_{0.05,15} = 1.753$$

❖ تدعي شركة متخصصة في تصنيع نوع معين من المعدات الصناعية أن 95% على الأقل من المعدات التي تنتجها مطابقة للمواصفات المطلوبة، تم اختيار عينة عشوائية مكونة من 100 وحدة من المعدات التي تقوم بتصنيعها ووجد أن بها 7 وحدات غير مطابقة للموصفات ، فإذا كانت P ترمز للنسبة الفعلية للمعدات المطابقة للمواصفات التي تنتجها الشركة. نود اختبار $H_0{:}P=0.95$ ضد $H_1{:}P<0.95$ عند مستوى معنوية 2.5%

15. قيمة احصاءة الاختبار تساوي تقريبا.....................

الحل:

نسبة الإنتاج الغير مطابق للمواصفات تساوي $\frac{7}{100} = 0.07$

بينما نسبة الإنتاج المطابق للمواصفات تساوي $\frac{93}{100} = 0.93$

اي ان $\quad P_0 = 0.95 \quad , \quad \hat{P} = 0.93$

$$Z_C = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1 - P_0)}{n}}} = \frac{0.93 - 0.95}{\sqrt{\frac{0.95(1 - 0.95)}{100}}} = -0.917$$

16. وفقا لنتائج العينة فإننا نجد أن فترة ثقة 95% حول P هي تقريبا...............

الحل:

$100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة حول النسبة P هي:

$$\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1 - \hat{P})}{n}} < P < \hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1 - \hat{P})}{n}}$$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \quad , \quad \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

$$0.93 - (1.96)\sqrt{\frac{0.93(1 - 0.93)}{100}} < P < 0.93 + (1.96)\sqrt{\frac{0.93(1 - 0.93)}{100}}$$

$$0.8799 < P < 0.98$$

❖ من مجتمعين مستقلين يتبعان التوزيع الطبيعي ولهما نفس التباين سحبت عينة عشوائية من كل مجتمع فأعطتنا النتائج التالية:

رقم العينة	حجم العينة	متوسط العينة	الانحراف المعياري للعينة
1	15	25	8
2	15	23	6

فإذا كان μ_1 ترمز لمتوسط المجتمع الأول و μ_2 ترمز لمتوسط المجتمع الثاني وأردنا اختبار $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ضد $H_1: \mu_1 > \mu_2$ باستخدام مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

17. قيمة احصاءة الاختبار تساوي تقريبا..................

الحل:

تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و متساويين و حجم العينتين صغير ، فإن احصاءة الاختبار:

$$T_C = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$SP = \sqrt{\frac{(n1 - 1)s_1^2 + (n2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{(15 - 1)8^2 + (15 - 1)6^2}{15 + 15 - 2}} = 7.071$$

$$T_C = \frac{(25 - 23) - (0)}{7.071\sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}}} = 0.7745$$

18. وفقا لبيانات العينتين نجد أن فترة ثقة 95% حول الفرق تساوي.........

الحل:

تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و متساويين و حجم العينتين صغيرفإن:

$100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للفرق بين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$هي:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - T_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$$

$$+ T_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$\alpha = 0.05 \to \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$T_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} = t_{0.025,28} = 2.048$$

$$(25 - 23) - (2.048)(7.071)\sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}} < (\mu_1 - \mu_2) < (25 - 23)$$

$$+(2.048)(7.071)\sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}}$$

$$-3.287 < (\mu_1 - \mu_2) < 7.287$$

19. مصنع يوجد به خطان لإنتاج نوع معين من أجهزة القياس الهندسية ، أخذت عينة عشوائية حجمها 200 جهاز من إنتاج الخط الأول ووجد ان 9 منها معيب، وأخذت عينة عشائية من إنتاج الخط الثاني حجمها 300 جهاز ووجد أن منها 15 جهاز معيب ، نود اختبار الفرض القائل بأن هناك اختلاف في نسبة الأجهزة المعيبة المنتجة من الخطين

($H_0:P_1=P_2$ ضد $H_1:P_1\neq P_2$) وذلك عند مستوى معنوية 0.01 ، قيمة احصاءة الاختبار تساوي تقريبا.................

الحل:

إحصاءة الاختبار هي:

$$Z_C = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_1} + \frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_2}}}$$

حيث:

$$\hat{P}_1 = \frac{9}{200} = 0.045 \quad , \quad \hat{P}_2 = \frac{15}{300} = 0.05$$

$$\hat{P} = \frac{9+15}{200+300} = 0.048$$

$$Z_C = \frac{(0.045 - 0.05) - (0)}{\sqrt{\frac{0.048(1-0.048)}{200} + \frac{0.048(1-0.048)}{300}}} = \frac{-0.005}{0.01951} = -0.256$$

20. النتائج التالية حسبت لمتغيران x و y توجد بينهما علاقة خطية :

$$n = 5, \sum_{i=1}^{n} y_i = 20 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 35 \; , \quad \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 = 90 \, , \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 265 \, , \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 154$$

القيمة المقدرة للمتغير y عندما x=10 تساوي..........

الحل:

معادلة انحدار Y على X التقديرية:

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{(5)(154) - (35)(20)}{[(5)(265) - 35^2]} = 0.7$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{20}{5} = 4 \quad , \quad \bar{x} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{35}{5} = 7$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 4 - (0.7 \times 7) = -0.9$$

$$\hat{Y} = -0.9 + 0.7X$$

عنما X تساوي 10 :

$$\hat{Y} = -0.9 + 0.7X = \hat{Y} = -0.9 + 0.7(10) = 6.1$$

<u>نموذج اختبار احصاء:</u>

1. إذا كان X متغير عشوائي له دالة كتلة الاحتمال التالية:

$$P(X = x) = \frac{e^{-4}(4)^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,3 \ldots.$$

فإن قيمة $P(X \geq 2)$ تساوي.......................

الحل:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [(P(X = 0) + P(X = 1)]$$
$$= 1 - \left[\frac{e^{-4}(4)^0}{0!} + \frac{e^{-4}(4)^1}{1!}\right] = 0.9084$$

2. إذا علمت أن الجسيمات تنبعث من مصدر مشع بمعدل 0.6 جسيم في الثانية وأن عدد هذه الجسيمات يتبع توزيع بواسون فإن احتمال انبعاث جسيم واحد على الأكثر في فترة زمنية طولها ثانية واحدة يساوي.......

الحل:

$$\lambda = 0.6$$
$$P(X \leq 1) = (P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{e^{-0.6}(0.6)^0}{0!} + \frac{e^{-0.6}(0.6)^1}{1!}$$
$$= 0.878$$

3. تحدث هزات أرضية في منطقة معينة بمعدل 3 هزات سنويا، على افتراض أنه في أي فترة زمنية عدد الهزات الأرضية في هذه المنطقة يتبع توزيع بواسون. فإن متوسط عدد الهزات الأرضية التي تحدث خلال فترة 5 أشهر هو ....

الحل:

12 شهر ← λ=3

5أشهر ← λ=?

$$E(X) = \lambda = \frac{(5 \times 3)}{12} = 1.25$$

4. إذا كان المتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فإن $P(Z>1.93)$ تساوي..............

الحل:

$$P(Z > 1.93) = 1 - P(Z < 1.93) = 1 - 0.9732 = 0.0268$$

5. إذا كان X متغير عشوائي له توزيع طبيعي بمتوسط 860 وتباين 400 فإن $P(X = 860)$ يساوي.......

الحل:

$$P(X = 860) = 0$$

6. إذا كان Z متغير عشوائي له توزيع طبيعي معياري ، فإن قيمة c بحيث $P(Z \leq c) = 0.0594$ هي...

الحل:

من خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن قيمة c تساوي 1.56-.

7. إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 25 وتباين σ^2 وكان $P(X \geq 10) = 0.9332$ فإن قيمة σ^2 تساوي..............

الحل:

$$P(X \geq 10) = P\left(Z \geq \frac{10 - 25}{\sigma}\right) = 0.9332 \rightarrow P\left(Z < \frac{10 - 25}{\sigma}\right) = 1 - 0.9332$$
$$P\left(Z < \frac{10 - 25}{\sigma}\right) = 0.0668$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$\frac{10-25}{\sigma} = -1.5 \rightarrow \sigma = \frac{-15}{-1.5} = 10$$

وبالتالي $\sigma^2 = 100$

8. مصنع لتصنيع المواد الكيميائية يصنع مادة كيميائية معينة تعبأ في زجاجات، فإذا كان أوزان هذه الزجاجات يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 5 جرام وانحراف معياري 0.2 جرام ، فإن النسبة المئوية للزجاجات التي تحتوي على كمية من هذه المادة الكيميائية تتراوح ما بين 4.6 و 5.4 هي..................

الحل:

$$P(4.6 < X < 5.4) = P\left(\frac{4.6-5}{0.2} < Z < \frac{5.4-5}{0.2}\right) = P(-2 < Z < 2)$$

$$= 0.9544 = 95.44\%$$

9. إذا كان $t_{\alpha,(v)}$ ترمز لقيمة المتغير العشوائي T الذي له توزيع t بدرجة حرية v والتي يقع إلى اليمين منها مساحة تساوي α أي ان $P(T \geq t_{\alpha,(v)}) = \alpha$ فإن قيمة $t_{0.95,(14)}$ تساوي........

الحل:

من خلال خاصية التماثل نجد أن:

$$t_{0.95,(14)} = -t_{0.05,(14)}$$

من خلال جدول توزيع t نجد أن:

$$t_{0.05,(14)} = 1.761$$

وبذلك يكون $t_{0.95,(14)} = -1.76$

10. إذا كان مستوى الكلسترول في الدم لدى أفراد مجتمع المهندسين العاملين في الحقول النفطية يتبع توزيع التوزيع الطبيعي بمتوسط مقداره 200 وحدة وبانحراف معياري 4 وحدات ، فإذا أخذت عينة حجمها 100 فرد من هذا المجتمع، فإن احتمال أن يكون متوسط مستوى الكلسترول في الدم للعينة يقل عن 199 وحدة هو..

الحل:

$$P(\overline{X} < 199) = P(Z < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z < \frac{199-200}{\frac{4}{\sqrt{100}}})$$

$$= P(Z < -2.5) = 0.0062$$

11. إذا كان 4% من إنتاج أحد خطوط الإنتاج بمصنع لقطع غيار السيارات غير مطابق للمواصفات . أخذت عينة عشوائية حجمها 96 قطعة من إنتاج هذا الخط. فإذا كانت الإحصاءة $\widehat{P}$ ترمز لنسبة الإنتاج الغير مطابق للمواصفات بعينة هذا الخط فإن $P(\widehat{P} > 0.05)$ تساوي.........

الحل:

$$P(\widehat{P} > 0.05) = P(Z > \frac{\widehat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}) = P(Z > \frac{0.05-0.04}{\sqrt{\frac{0.04(1-0.04)}{96}}})$$

$$= P(Z > 0.5) = 0.3085$$

12. إذا كانت أنابيب صورة التلفزيون المصنعة بواسطة المصنع A لها متوسط عمر 6.3 سنة وتباين 0.8 سنة² بينما أنابيب صور التلفزيون المصنعة بواسطة المصنع B لها متوسط عمر 6.1 سنوات وانحراف معياري 0.8 سنة ، أخذت عينة عشوائية حجمها 30 أنبوب مصنعة بواسطة المصنع A كما أخذت عينة عشوائية حجمها 48 أنبوب مصنعة بواسطة

المصنع B فإذا كان $\overline{X}_1$ ترمز لإحصاءة متوسط أعمار العينة من أنابيب المصنع A بينما $\overline{X}_2$ ترمز لإحصاءة متوسط أعمار العينة من أنابيب المصنع B فإن احتمال أن يكون متوسط أعمار عينة أنابيب المصنع A أكبر من متوسط أعمار عينة أنابيب المصنع B يساوي............

الحل:

تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2معلومين:

$$P(\overline{X}_1 > \overline{X}_2) = P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 > 0) = P(Z > \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}})$$

$$= P(Z > \frac{0 - (6.3 - 6.1)}{\sqrt{\frac{0.8}{30} + \frac{(0.8)^2}{48}}} = P(Z > -1) = 0.8413$$

نموذج أختبار احصاء

1. البيانات التالية تبين أوزان عينة من الأطفال مقاسه لأقرب كيلوجرام بعد سنة من الولادة :

10 8 6 4 4 6 8 10

قيمة وسيط أوزان العينة يساوي..............

الحل:

أولا ترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا كالتالي : 4 4 6 6 8 8 10 10

$$x\left(\frac{n+1}{2}\right) = x\left(\frac{8+1}{2}\right) = x_{4.5} = \frac{6+8}{2} = 7$$

2. البيانات التالية مرتبة ترتيبا تصاعديا 18 20 $X_{(3)}$ 30 35 39 , إذا كانت قيمة الوسيط لهذه البيانات تساوي 28 فإن القيمة المجهولة X(3) تساوي ....

الحل:

$$x\left(\frac{n+1}{2}\right) = x_{3.5} = \frac{30 + x_{(3)}}{2} = 28 \rightarrow x_{(3)} = (28 \times 2) - 30 = 26$$

3. إذا كان تركيز الهيموغلوبين في الدم لعشرة من المرضى هو :

13.0 6.5 7.4 9.7 9.1 15.1 12.9 6.0 11.9 10.1

فإن المتوسط الحسابي لتركيز الهيموغلوبين في الدم لهؤلاء المرضي يساوي ....

الحل:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} xi}{n} = \frac{101.17}{100} = 10.17$$

4. مصنع للمشروبات الغازية أجريت له دراسة حول كربونات الكالسيوم التي يستخدمها في صناعة المشروبات فاختار عينة عشوائية من المشروبات التي يصنعها فكانت القراءات لكربونات الكالسيوم بالعينة كما يلي :

18.90 20.09 20.31 21.13 19.97 19.40 19.26 19.62 18.90

وكانت $\sum_{i=1}^{9} X_i = 177.58$ و $\sum_{i=1}^{9} (X_i - \overline{X})^2 = 4.2$ وعليه فإن

الوسيط يساوي ....

الحل:

أولا ترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا كالتالي :

21.13 20.31 20.09 19.97 19.62 19.40 19.26 18.90 18.90

$$x\left(\frac{n+1}{2}\right)=x\left(\frac{9+1}{2}\right)=x_5=19.62$$

5. من بيانات السؤال السابق الانحراف المعياري يساوي ....

الحل:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}=\frac{4.2}{9-1}=0.525\rightarrow S=0.7245688$$

6. من بيانات السؤال 4 معامل الاختلاف يساوي ....

الحل:

$$(CV)=\frac{S}{\overline{X}}\times 100\%,$$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{9}xi}{n}=\frac{177.58}{9}=19.731111\,,C.V=3.6722\%$$

7. البيانات التالية تبين المعدل الفصلي لعينة من 6 طلاب يدرسون بكلية العلوم

79.6 78.9 79.8 79.7 80.1 79.5

قيمة معامل الاختلاف لدرجات العينة تساوي....................

الحل:

$$(CV)=\frac{S}{\overline{X}}\times 100\%,\qquad \bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{6}xi}{n}=\frac{477.6}{6}=79.6$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}Xi)^2}{n}}{n-1}=\frac{38017.76-\frac{(477.6)^2}{6}}{6-1}=0.16\rightarrow S=0.4$$

$$(CV)=\frac{0.4}{79.6}\times 100\%=0.5025\%$$

8. يوجد في مستشفى مولدين للكهرباء كل مولد مستقل في عمله عن المولد الأخر فإذا كان احتمال أن يعمل المولد الأول عند الحاجة إليه يساوي 0.93 واحتمال أن يعمل المولد الثاني عند الحاجة إليه يساوي0.97 فان احتمال أن يعمل المولد الأول عند الحاجة إليه علما بأن المولد الثاني لم يعمل عند الحاجة إليه يساوي ....

الحل:

A حدث يشير الى عمل المولد الأول عند الحاجة اليه $P(A)=0.93$

B حدث يشير الى عمل المولد الثاني عند الحاجة اليه $P(B)=0.97$

المطلوب $P(A/B^C)$: $\quad P(A/B^C)=P(A)=0.93$

9. إذا كان A وB حدثان معرفان على فراغ العينة S وكان $P(A\cup B)=0.8$ و $P(A)=0.2$ فان قيمة $P(B)$ عندما يكون Aو B حدثان مستقلان تساوي ....

الحل:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$0.8=0.2+P(B)-0.2P(B)\rightarrow P(B)=\frac{0.6}{0.8}=0.75$$

10. إذا تم اختيار شخص عشوائيا وجعلنا A ترمز لحدث أن الشخص المختار جنسه ذكر و B ترمز لحدث أن الشخص المختار مصاب بالتهاب مزمن بالجيوب الأنفية و $A \cap B$ ترمز لحدث أن الشخص المختار جنسه ذكر ومصاب بالتهاب مزمن بالجيوب الأنفية فاذا علمت بأن $P(A) = 0.25$ و $P(B) = 0.52$ و $P(A \cap B) = 0.08$ فان احتمال ان يكون الشخص المختار غير مصاب بالتهاب في الجيوب الأنفية علما بأنه ذكر يساوي ....

الحل:

المطلوب: $P(B^C/A)$

$$P(B^C/A) = \frac{P(B^C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.25 - 0.08}{0.25} = 0.68$$

11. اذا كان طلاب السنة الرابعة بكلية الطب موزعين على ثلاثة مجموعات بنسبة 45% 30% 25% على الترتيب , اجري لهم امتحان في مادة الإحصاء فكانت نسبة الرسوب للمجموعات الثلاثة 15% 10% 30% على الترتيب , اختير طالب عشوائي فان :

احتمال أن يكون راسب في الإحصاء يساوي ....

الحل:

B الطالب راسب في الاحصاء(الصفة المشتركة)

A1 المجموعة الاولى , A2 المجموعة الثانية , A3 المجموعة الثالثة

$$P(A_1) = 0.45, \quad P(A_2) = 0.30, \quad P(A_3) = 0.25$$

$$P(B/A_1) = 0.15, P(B/A_2) = 0.10, P(B/A_3) = 0.30$$

$$P(B) = P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B/A_2) + P(A_3) \times P(B/A_3) = 0.1725$$

12. من السؤال السابق إذا علمت أن الطالب كان ناجحا فان احتمال ان يكون من الطلبة الدارسين بالمجموع الأولى ......

الحل:

بفرض أن E ترمز إلى أن الطالب ناجح في الاحصاء.

$$P(A_1/E) = \frac{P(E/A_1)P(A_1)}{1 - P(B)} = \frac{[1 - P(B/A_1)]P(A_1)}{1 - P(B)} = \frac{0.85 \times 0.45}{1 - 0.1725} = 0.4622$$

<u>نموذج اختبار احصاء:</u>

1. اذا كان احتمال عدم استخدام سائق لحزام الأمان هو 0.5 واحتمال وقوع حادث قاتل للسائق وعدم استخدامه لحزام الأمان هو 0.35 ، فإن احتمال وقوع حادث قاتل علما بأن السائق لا يستخدم حزام الأمان هو

Ψ	0.6000	и	0.800	π	0.700	Σ	0.900	Θ	0.500	Ω	خلاف ذلك

الحل:

A حدث عدم استخدام السائق لحزام الأمان حيث $P(A) = 0.5$

B حدث وقوع حادث قاتل .

$$P(A \cap B) = 0.35$$

المطلوب هو: $P(B/A)$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.35}{0.5} = 0.7$$

2. إذا كانت درجات الحرارة اليومية لفصل الصيف تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 33 درجة وانحراف معياري 5 درجات فإن احتمال أن تكون درجة الحرارة في أحد أيام الصيف بين 30 و 36 درجة هو

خلاف ذلك	Ω	0.4254	Θ	0.5528	Σ	0.514	п	0.4206	и	0.5328	Ψ

الحل:

$$P(30 < X < 36) = P\left(\frac{30-33}{5} < Z < \frac{36-33}{5}\right) = P(-0.6 < Z < 0.6) = 0.4514$$

3. لاحظت إدارة الشرطة بأن 75% من سائقي السيارات يستخدمون حزام الأمان بعد حملة التوعية فإذا تم اختيار 10 سائقين عشوائيا فإن احتمال أن يكون في العينة سائق واحد غير ملتزم باستخدام حزام الأمان هو تقريبا

خلاف ذلك	Ω	0.2314	Θ	0.0725	Σ	0.2440	п	0.1211	и	0.1877	Ψ

الحل:

$$P = 0.25 \ , \ q = 0.75 \ , \ n = 10$$

$$P(X = 1) = C_1^{10}(0.25)^1(0.75)^{10-1} = 0.1877$$

4. إذا كان $P(A) = 0.20, P(B) = 0.35 , P(A \cap B) = 0.12$ فإن $P(A \cap B^C)$ هو

خلاف ذلك	Ω	1.0	Θ	0.13	Σ	0.23	п	0.08	и	0.07	Ψ

الحل:

$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0.20 - 0.12 = 0.08$$

5. مدير شركة يريد شراء أربعة حواسيب وخمس طابعات وثلاثة آلات تصوير، حيث اتصل بمحل لديه سبعة حواسيب وثمان طابعات وثلاث آلات تصوير وماسحة واحدة فإن عدد الطرق الممكنة لاختياره هو

خلاف ذلك	Ω	56	Θ	7840	Σ	840	п	1960	и	1470	Ψ

الحل:

$${}^7C_4 \ {}^8C_5 \ {}^3C_3 = 1960$$

6. الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات الغياب المسجلة بأحد مشاريع البناء سنويا:

عدد مرات الغياب	0	1	2	3	4
احتمال الغياب	0.35	0.26	2C	0.15	C

فإن قيمة C تساوي

خلاف ذلك	Ω	0.0	Θ	0.07	Σ	0.12	п	0.080	и	0.36	Ψ

الحل:

$$P(X = x) = 1 \rightarrow 0.35 + 0.26 + 2C + 0.15 + C = 1 \rightarrow C = 0.08$$

7. باستخدام معلومات السؤال السابق فإن التباين لعدد مرات الغياب في هذه المشاريع هو تقريبا

خلاف ذلك	Ω	1.00	Θ	1.6459	Σ	1.7044	п	1.7075	и	1.7104	Ψ

الحل:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$E(X) = 0 * 0.35 + 1 * 0.26 + 2 * 0.16 + 3 * 0.15 + 4 * 0.08 = 1.35$$
$$E(X^2) = 0^2 * 0.35 + 1^2 * 0.26 + 2^2 * 0.16 + 3^2 * 0.15 + 4^2 * 0.08 = 3.53$$
$$V(X) = 3.53 - [1.35]^2 = 1.7075$$

8. ليكن X متغير عشوائي متصل له دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فإن $P(1 \leq X \leq 1.5)$ يساوي

خلاف ذلك	Ω	1.000	Θ	0.0000	Σ	0.320	п	0.250	и	0.075	Ψ

الحل:

$$P(1 \leq X \leq 1.5) = 0$$

9. يعمل جهاز حاسوب بنوعين من البرامج A و B وذلك اعتمادا على نوع المسألة المراد حلها، ومن خلال التجربة تبين أن البرنامج A يستخدم لحل 45% من المسائل، فإذا تم استخدام البرنامج A فإن احتمال أن تحل المسألة في الوقت المحدد هو 0.50 أما اذا استخدم البرنامج B فإن احتمال أن تحل المسألة في الوقت المحدد هو 0.75، فإذا استخدم جهاز الحاسوب لحل مسألة معينة فإن احتمال أن تحل المسألة في الوقت المحدد هو

خلاف ذلك	Ω	1.0000	Θ	0.638	Σ	0.640	п	0.600	и	0.465	Ψ

الحل:

M حدث حل المسألة في الوقت المحدد

$$P(M/A) = 0.50\ ,\ P(M/B) = 0.75\ ,\quad P(A) = 0.45\ ,\quad P(B) = 0.55$$
$$P(M) = P(M/A) * P(A) + P(M/B) * P(B)$$
$$= (0.50 * 0.45) + (0.75 * 0.55) = 0.6375$$

10. باستخدام معلومات السؤال 9 ، إذا حلت المسألة في الوقت المحدد، فإن احتمال أن البرنامج B هو الذي استخدم يساوي

خلاف ذلك	Ω	0.7097	Θ	0.0000	Σ	0.6471	п	0.3438	и	0.500	Ψ

الحل:

$$P(B/M) = \frac{P(M/B) * P(B)}{P(M)} = \frac{0.75 * 0.55}{0.6375} = 0.647$$

11. المتغير العشوائي X له تزيع بواسون بحيث $P(X = 1) = 2P(X = 0)$ فإن $P(X = 2)$ هو

خلاف ذلك	Ω	0.2707	Θ	0.0902	Σ	0.3529	п	0.1805	и	0.1353	Ψ

الحل:

$$P(X = 1) = 2P(X = 0)$$

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = 2\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\right) \rightarrow \lambda = 2$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-2}2^2}{2!} = 0.2706$$

12. المتغير العشوائي X له التوزيع الاحتمالي التالي:

x	-1	0	1
P(X=x)	a	0.5	b

إذا علمت أن E(X)=0.3 فإن قيمة b تساوي

خلاف ذلك	Ω	0.25	Θ	0.40	Σ	0.35	п	0.45	и	0.1	Ψ

الحل:

$$\sum P(X = x) = a + 0.5 + b = 1 \rightarrow a + b = 0.5 \qquad (1)$$

$$E(X) = -a + b = 0.3 \qquad (2)$$

من 1 و 2 نجد أن$a = 0.1$ و $b = 0.4$

13. إذا كانت أطوال الأخشاب المصنعة بواسطة شركة الأخشاب تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين 9 أمتار مربعة وكان احتمال قطعة من الخشب تم اختيارها عشوائيا يكون طولها أقل من 5.49 مترا هو 0.4325 فإن قيمة المتوسط μ تساوي

خلاف ذلك	Ω	6	Θ	7	Σ	5,83	п	6.17	и	6.34	Ψ

الحل:

$$P(\overline{X} < 5.49) = P(Z < \frac{5.49 - \mu}{\frac{3}{\sqrt{1}}}) = 0.4325$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$\frac{5.49 - \mu}{3} = -0.17 \rightarrow \mu = 6$$

14. احتمال الحصول على نفط عند حفر بئر نفطي في منطقة معينة هو 0.25 فإذا تم حفر 5 آبار بتلك المنطقة فإن احتمال الحصول على نفط في بئر واحد على الأقل هو

خلاف ذلك	Ω	1.000	Θ	0.7779	Σ	0.7379	п	0.8319	и	0.7627	Ψ

الحل:

$$P = 0.25 \ , \quad q = 0.75 \ , \ n = 5$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - [P(X = 0)]$$

$$1 - [C_0^5(0.25)^0(0.75)^{5-0}] = 0.76269$$

15. إذا كان A و B حدثان معرفان على فراغ العينة S بحيث:

$$P(B) = W \ , \quad P(A^C) = 0.7 \ , \quad P(A \cup B) = 0.8$$

فإن قيمة W عندما A و B مستقلين تساوي

خلاف ذلك	Ω	0.7143	Θ	0.2857	Σ	0.8571	п	0.6123	и	0.8333	Ψ

الحل:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = P(A) + P(B)[1 - P(A)]$$

$$0.8 = 0.3 + P(B)[0.7] \rightarrow W = \frac{0.5}{0.7} = 0.714$$

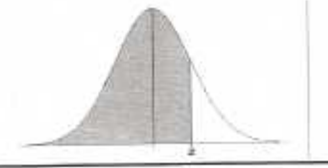
****

جدول توزيع Z

1. جدول التوزيع الطبيعي المعياري الذي يعطي المساحة يسار قيم Z السالبة كما هو موضح بالشكل.

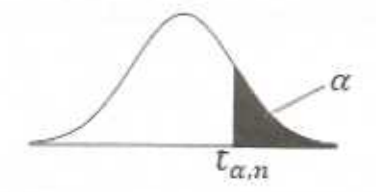
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

2. <u>جدول التوزيع الطبيعي المعياري الذي يعطي المساحة يسار قيم Z الموجبة كما هو موضح بالشكل.</u>



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.999[illegible]
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جدول توزيع t



n \ α	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
z*	0.674	0.841	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291



شارع الساعدية متفرع من شارع ميزران – طرابلس / ليبيا

0925039713

0213344559